圆之吻
——有趣的尺规作图

YUANZHIWEN
——YOUQU DE CHIGUI ZUOTU

莫海亮　编著◎
吴鹤龄　审校◎

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是一本讨论平面几何的核心问题——尺规作图的专著。在简要介绍了点、线、面、角、圆以及线段的平行和垂直等基本概念和定义后，重点讨论在人们的日常生活和生产劳动中经常需要的许多图形的作图方法，以正规的尺规作图为主，兼及单尺、单规、锈规等非常规的尺规作图。本书内容丰富、有趣、既具有实用价值，又能启发思维。可供广大数学爱好者学习，也可作为中学生学习数学的辅助读物。

图书在版编目（CIP）数据

圆之吻：有趣的尺规作图 / 莫海亮编著. —北京：电子工业出版社，2016.2

ISBN 978-7-121-27672-9

Ⅰ. ①圆… Ⅱ. ①莫… Ⅲ. ①几何学—普及读物 Ⅳ. ①O18-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 285528 号

策划编辑：徐云鹏
责任编辑：郝黎明
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：720×1 000　1/16　印张：14.25　字数：273.6 千字
版　　次：2016 年 2 月第 1 版
印　　次：2016 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：3 000 册　　定价：49.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前言

数学的研究对象可以概括为“数”和“形”两大类。无论是“数”还是“形”，都是和人们的日常生活和生产活动紧密相连的，这就不难理解为什么数学成了人类最早涉足的科学领域，具有悠久的历史和辉煌的成绩，并成为其它科学发展的基础。

在研究“形”这部分数学中，尺规作图已有两千多年的历史。它起源于古希腊，内容非常丰富，对推动数学发展作出了很大贡献，在数学史上占有重要的地位。其实用价值虽然因为各种现代绘图工具的出现，尤其是计算机诞生以后各种绘图软件的出现而下降，但在锻炼人们的逻辑思维能力方面，其作用仍不容低估。因此在世界各国，尺规作图始终是中学生必须学习和掌握的重要内容，是衡量学生综合素质的一个重要指标。在尺规作图里，解和最优解是两回事，为了获得最优解，往往需要更高深的数学知识，这使尺规作图充满魅力。另外，一些尺规作图难题蕴含的数学原理比较高深（如锈规作图），至今尚未完全被解决，所以这门古老的数学依旧充满青春活力，吸引一代又一代的人努力探索，推动着数学继续向前发展。

本书是有关尺规作图的综合性科普读物，供对此有兴趣的科技人员阅读，也可作为学生用以扩大知识面的课外读物。本书分十二章，前五章介绍尺规作图，这是尺规作图的基础，也是本书的重点；第六章到第八章分别介绍单规作图、单尺作图、锈规作图，这些是尺规作图的主要分支；第九章介绍其他尺规作图，如直尺定规作图、短尺小规作图等，这些分支内容相对较少；第十章近似作图，介绍一些尺规作图不能作出的图形的一些参考近似作法，这类作图不存在对错之分，只有优劣之别；第十一章介绍双边尺和刻度尺作图，这类作图工具超出了尺规作图对工具的限制，已经不属于尺规作图范畴，是人们为了解决一些尺规作图不能

解决的问题而发展起来的作图；第十二章番外篇，介绍一些和尺规作图很像又不太像的另类“尺规作图”。

数学常常被认为是既抽象难懂又枯燥乏味的学科，尺规作图也是如此。实际上这仅仅是问题的表面，一旦深入研究，就能体会到其中有无穷趣味。为了不引起大家的审美疲劳，本书侧重介绍一些有趣的尺规作图问题，有兴趣者可自行研究其他作图问题。另外考虑到繁冗复杂的推理证明过程确实会降低读者的兴趣，所以本书所有作图的证明过程一概从略，愿意验证作图正确性的读者可以自行证明，或者用几何画板、AutoCAD 等数学或工程软件按照书中的步骤画出，也不难验证。

本书的作图方法绝大多数来自笔者自己多年的研究，少部分作图参考了数学家的方法，重要难题作者在书中有标明。

莫海亮　2014 年末于深圳

目录

第一章 尺规作图基础知识

人类很早就懂得使用直尺和圆规作为几何作图工具。由于它们简单实用，直到今天，仍然是我们常用的绘图工具。围绕着尺规，便产生了如何用尺规作出复杂的几何图形的问题。

第一节 尺规作图定义

只使用无刻度的直尺和圆规这两种作图工具，并且在有限次步骤内解决平面几何作图问题就叫尺规作图，也叫欧几里得作图。尺规作图在英文里叫作 Ruler-and-Compass Construction 或 Compass-and-Straightedge Construction。

这里需要明确以下四点：

（1）尺规作图里的直尺不同于日常使用的普通直尺。普通直尺长度是有限的，而尺规作图中的直尺长度则是无限的，可以连结任意距离的两个点；普通直尺有刻度，而尺规作图中的直尺没有刻度，无法利用刻度作出两段长度相等的线段；普通直尺有矩形特性，可以利用尺子两边作出平行线，尺规作图中的直尺没有矩形特性，它只有一边，无法直接作出两条互相平行的平行线。也就是说，尺规作图里的直尺，只能利用直尺的一边作出不确定长度的线段、无限延长一条线段或连结任意距离的两个点。

（2）尺规作图里的圆规，也不同于普通圆规。普通圆规两脚长短是有限的，可以作出的圆的大小总有一个上限。尺规作图里的圆规大小则是无限的，可以作出任意半径长度的圆。

（3）尺规作图中只能用一把直尺和一个圆规。当然，有了前面对直尺和圆规的使用限制，多把直尺和圆规也派不了用场。

（4）尺规作图的作图过程必须是可以穷尽的，也就是说必须在有限步骤内完成。

尺规作图对作图工具限制非常严格，尤其是对直尺的规定，长度无限但既没有刻度又没有宽度并且只有一边，同现实的直尺大相径庭。另外，有些需要人为判断的作图非常困难，甚至是办不到的，例如，两条直线的夹角如果非常小，就很难判断交点在哪里，由此可见，尺规作图是一种理想化的作图，实际上并不存在。我们在实际作图时使用的还是普通的直尺和圆规，但只要我们遵守上述规定，就可以认为是尺规作图。

第二节

尺规作图的起源

作图是和几何学的兴起联系在一起的，有悠久的历史。“几何学”的英文“Geometry”来自拉丁文“Geometria”，原意就是土地测量，即测地术。相传四千年前，埃及的尼罗河每年洪水泛滥，总是把两岸的土地淹没，水退后土地界限不分明。当时埃及的劳动人民为了重新测出被洪水淹没的土地的地界，每年总要进行土地测量，因此积累了许多测量土地的知识，从而产生了几何学的初步知识。后来希腊人由于跟埃及人通商，从埃及学到了测量与绘画等的几何初步知识。希腊人在这些几何初步知识的基础上，逐步充实并提高成为一门完整的几何学。约公元前 300 年，希腊人欧几里得（见图 1-2-1）把在他以前的埃及和希腊人的几何学知识加以系统地总结和整理，写出了《几何原本》（Euclid's Elements，形成了严密的演绎系统学科，如图 1-2-2 所示为《几何原本》最早英文版的首页）。

大约在 2500 年前，希腊天文学家、数学家伊诺皮迪斯（Oenopides of Chios，约公元前 465 年）提出了两个著名命题：

（1）给定直线外一点求作直线的垂线（编入《几何原本》卷 I 第 11 命题）。

（2）求作一角等于已知角（编入《几何原本》卷 I 第 23 命题）。

图 1-2-1　欧几里得

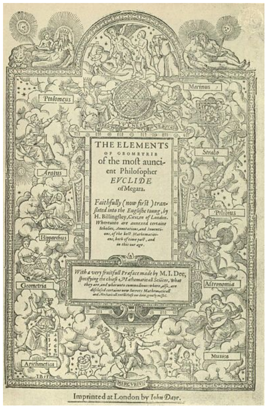


图 1-2-2　英文版《几何原本》

伊诺皮迪斯提出这两个命题的重要性不在于垂线和角的作出，而是在尺规限制的条件下来解决。在此之前，作图工具不受限制，是随意的。伊诺皮迪斯在解决这两个问题时，首先明确提出只准使用直尺和圆规两种工具，是希腊尺规作图的最早倡导者，以后尺规的限制逐渐成为一种公约，最后总结在《几何原本》中。为什么对尺规作图的作图工具有这些限制？现在一般认为有三个原因：

（1）古希腊数学的基本精神是从尽可能少的原始假设导出尽可能多的结论。

（2）按毕达哥拉斯学派的观点，圆是最完美的图形，直线则是最基本的几何元素，他们认为有了这两样基本的几何对象，应该得出所有几何的内容。

（3）古希腊强调数学的思维训练作用而忽视了其实用价值，所以作图工具就有了严格的限制。

在我国，相传女娲伏羲（见图 1-2-3）创造了画圆的“规”、画方的“矩”，这里的“矩”是“直角尺”也叫“矩尺”，与直尺不同（见图 1-2-4）。又传说倕是“规矩”和“准绳”的创始人。据《史记·夏本纪》记载，禹（见图 1-2-5）“左准绳，右规矩，载四时，以开九州，通九道，陂九泽，度九山”，说明当时的“规”和“矩”就已经作为实用的测量及规划工具。墨子（约公元前 468—376，如图 1-2-6 所示）所著的《墨经》，是我国的几何学雏形。

图 1-2-3　女娲伏羲

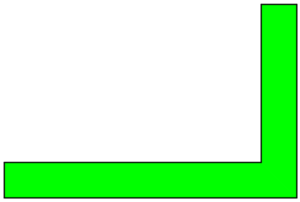


图 1-2-4　矩尺

图 1-2-5　大禹

图 1-2-6　墨子

相比西方，我国比较务实，我国古代的“规”和“矩”，没什么严格的使用规则限制，可作图范围便大大拓宽了，这也导致我国古代的数学未能形成像西方数学那样严密的演绎体系。

第三节

三大作图难题

由于尺规作图对作图工具的限制比较严格，所以有的平面几何作图问题无法通过尺规作图解决。历史上有三个比较著名的尺规作图难题曾长期困扰着学术界，

被称作“三大作图难题”，分别是：

（1）三等分角问题，也就是三等分给定的任意角。

（2）立方倍积问题，也叫“倍立方问题”，即求作一立方体，使其体积是已知立方体体积的 2 倍。

（3）化圆为方问题，求作一正方形，使其面积等于已知圆的面积。

关于这三个问题有这样的故事：

三等分角

公元前 4 世纪，托勒密一世定都亚历山大城。他凭借优越的地理环境，发展海上贸易和手工艺，奖励学术。他建造了规模宏大的“艺神之宫”，作为学术研究和教学中心；他又建造了著名的亚历山大图书馆，藏书 75 万卷。托勒密一世深深懂得发展科学文化的重要意义，他邀请著名学者到亚历山大城，当时许多著名的希腊数学家都来到了这个城市。

亚历山大城郊有一座圆形的别墅，里面住着一位公主。圆形别墅中间有一条河，公主的居室正好建立在圆心处。别墅南北围墙各开了一个门，河上建了一座桥，桥的位置和南北门位置恰好在一条直线上。国王每天赏赐的物品，从北门运进，先放到南门处的仓库，然后公主再派人从南门取回居室。

一天，公主问侍从：“从北门到我的卧室，和从北门到桥，哪一段路更远？”侍从去测量，结果是两段路一样远的。

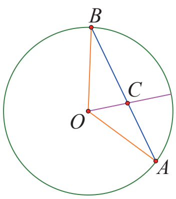


图 1-3-1

过了几年，公主的妹妹小公主长大了，国王也要为她修建一座别墅。小公主提出她的别墅要修得像姐姐的别墅那样，有河，有桥，有南北门。国王满口答应，小公主的别墅很快就动工了，当把南门建立好，要确定桥和北门的位置时，却出现了一个问题：怎样才能使得北门到卧室和北门到桥的距离一样远呢？

问题是这样的：如图 1-3-1 所示，已知南门位置为 A，卧室在圆心 O 处，河流在 OC 直线上，现在要求作出北门 B 和桥 C，使得 $BO=BC$，

要确定北门 B 的和桥 C 的位置，关键是作出 $\angle BAO$。

分析： 设AO和河流OC的夹角$\angle COA$为α。

则

$$\angle BCO = \alpha + \angle BAO$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{在}\triangle BOC\text{中，}\ \angle BOC + \angle BCO + \angle OBC = 180^\circ \\ BO = BC \Rightarrow \angle BOC = \angle BCO \\ BO = AO \Rightarrow \angle BAO = \angle OBA \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(\alpha + \angle BAO) + (\alpha + \angle BAO) + \angle BAO = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAO = \frac{180^\circ - 2\alpha}{3}$$

只要能把 180° -2α这个角三等分，就能够确定出桥和北门的位置了，解决问题的关键是如何三等分一个角。工匠们试图用直尺和圆规作图法确定出桥的位置，可是他们用了很长的时间也没有解决，于是他们去请教阿基米德。

阿基米德用在直尺上做固定标记的方法，解决了三等分一角的问题，从而确定了北门的位置。阿基米德的具体作法如下：

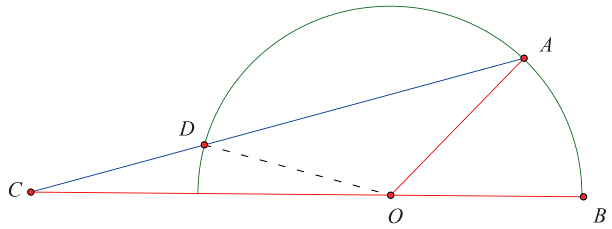


图 1-3-2

如图 1-3-2 所示，已知$\angle AOB$，求三等分$\angle AOB$的角。

（1）在直尺上标记两个刻度，距离等于 x。

（2）以 O 为圆心，x 为半径作圆，与已知角的交点为 A 点和 B 点。

（3）反向延长 BO 直线。

（4）调整刻度尺的位置，使得刻度尺的一个刻度在 BO 直线上，另一个刻度 D 点在⊙O 上，并且直尺经过 A 点。此时直尺与 BO 的交点为 C，也是直尺的另一个刻度，则$\angle ACB=\angle AOB/3$。

正当大家称赞阿基米德了不起时，阿基米德却说："这个确定北门位置的方法固然可行，但是是有问题的。"阿基米德在尺上做了标记，等于是做了刻度，这在尺规作图法中是不允许的。如何用尺规作图解决三等分角，阿基米德也毫无办法。

立方倍积

传说中，这问题的来源可追溯到公元前 429 年，一场瘟疫袭击了希腊提洛岛（Delos，爱琴海上一个岛屿），造成四分之一的人口死亡。岛民们推派一些代表去神庙请示阿波罗的旨意，神指示说："要想遏止瘟疫，得将阿波罗神殿（见图 1-3-3）中那正立方的祭坛加大一倍"，解决这个问题只允许用直尺和圆规。

图 1-3-3　阿波罗神殿

人们把每边增加了一倍，结果祭坛体积变成了 8 倍，瘟疫依旧蔓延；接着人们又试着把祭坛体积改成原来的 2 倍，但形状却变为一个长方体，……提洛岛人在万般无奈的情况下，只好到雅典去求教于当时著名的学者柏拉图。

开始，柏拉图和他的学生认为这个问题很容易，因为根据他们以往的经验，用直尺和圆规可以轻而易举地作一个正方形，使它的面积等于已知正方形的 2 倍。不过柏拉图和他的学生最终还是无法解决这个问题。

化圆为方

公元前 5 世纪，古希腊哲学家阿那克萨哥拉（希腊语：Αναξαγόρας，前 500 年－前 428 年，伊奥尼亚人）因为发现太阳是个大火球，而不是阿波罗神，犯了“亵渎神灵罪”而被投入监狱。阿那克萨哥拉认为：“太阳只是一块火热的石头，不是什么太阳神阿波罗，太阳大概有伯罗奔尼撒半岛那么大。另外，那个夜晚发出清光的月亮，它本身并不发光，全是靠了太阳的照射才有了光亮。”

在监狱的日子里，阿那克萨哥拉百无聊赖。一天夜里睡不着，他看着圆圆的月亮透过正方形的铁窗照进牢房后突发奇想：能不能仅用直尺和圆规作一个正方形，使其面积与一个已知圆的面积恰好相等呢？就这样，一道世界著名难题——“化圆为方”诞生了。

起初他认为这个问题很容易解决，没想到苦苦思索了很长时间仍一无所获。

后来经过好朋友、政治家伯里克利的营救，阿那克萨哥拉获释出狱，他把在监狱中想到的问题公布出来。许多数学家对这个问题非常感兴趣，可他们和阿那克萨哥拉一样，也没能解决。

三大作图难题评说

在 2400 年前的古希腊已经提出这些问题，但人们一直未得其解，很多数学家为此甚至耗尽毕生精力。直至 1837 年，法国数学家旺策尔（Pierre L.Wantzel）首先证明“三等分角”和“立方倍积”为尺规作图不能解决的问题。1882 年德国数学家林德曼（C.L.F.Lindemann，1853—1939）证明 π 是超越数（transcendental number）后，“化圆为方”也被证明为尺规作图不能解决的问题，至此了结了历时两千多年的作图悬案。

从历史上看，许多数学成果是为解决“三大难题”而得出的副产品，特别是开创了对圆锥曲线的研究，发现了一批著名的曲线，等等。不仅如此，三大问题还和近代的方程论、群论等数学分支发生了关系，“三大作图难题”是一只会下金蛋的鸡！对推动数学发展有重要意义。

直到今天，很多人仍认为三等分角这个问题太过简单，国内外仍然有大量业余数学爱好者在研究这个问题的解法。他们认为这些问题应该可解，只是人们尚未找到解法而已（当然，他们也都未认真研究有关的数学证明）。也有很多人宣称解决了“三等分任意角”尺规作图问题，但检查结果无一例外，他们的作法要么是错的，要么没有严格遵守尺规作图工具使用规则。

追求真理的精神值得鼓励，但不要盲目，在给定的条件下，要相信数学得出的结论。想解决这三大难题，首先得指出数学家们关于“三大难题尺规作图不能完成”证明的错误再说，否则浪费了大量的时间精力，徒劳无功。

也许有人会不服气：“尺规作图为什么要把直尺和圆规的使用限定得那么死？规则放宽点，能够解决更多的问题不也很好吗？”不错，用其他规定也不坏，但数学的基本精神是先有了规则才根据规则来谈如何解问题或谈问题是否可解。所谓三大难题，工具的使用规定得就是那么死，如果规定改了，则变成其他问题了，再也不是所谓的三大作图难题。就像玩中国象棋，规定象不能过河，如果象可以过河，则成另外一种游戏了。

第四节
作图公法

任何尺规作图的步骤均可分解为以下五种方法，这些方法是客观明确不需要证明的，所以也称为作图公法。

（1）通过两个已知点可作一直线。

（2）已知圆心和半径可作一个圆。

（3）若两已知直线相交，可求其交点。

（4）若已知一直线和一已知圆相交，可求其交点。

（5）若两已知圆相交，可求其交点。

具体如图 1-4-1 所示。

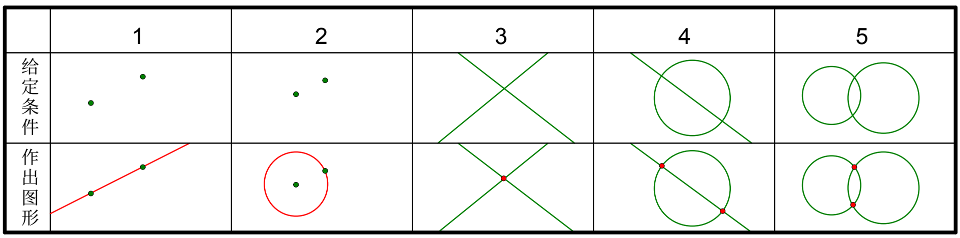


图 1-4-1　作图公法

举一个公法作图的例子：已知 A、B 两点，求作其中点。

作法（如图 1-4-2 所示）：

（1）过 A、B 两点作直线 AB。（公法 1）

（2）以 A 为圆心，AB 为半径作圆。（公法 2）

（3）以 B 为圆心，AB 为半径作圆。（公法 2）

（4）圆 A 与圆 B 的交点为 C、D 两点。（公法 5）

（5）过 C、D 两点作直线 CD。（公法 1）

（6）CD 与 AB 的交点为 M 点。（公法 3）

则 M 点为 A、B 两点的中点。

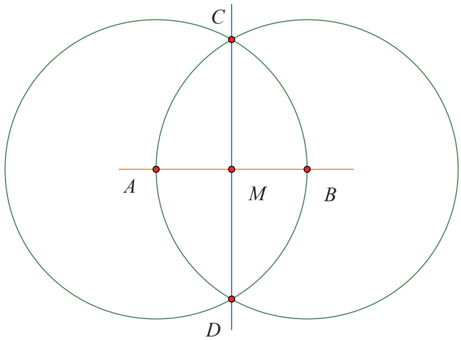


图 1-4-2

这里需要注意一下，对于作图公法 4“直线和圆相交”和作图公法 5“圆与圆相交”，这里都是“相交”而不是“相切”，我们才可以直接找出其公共点。如果直线和圆相切、圆和圆相切，虽然也有一个公共点，但必须再花一些步骤用圆或直线的相交线将切点找出，而不能直接凭肉眼就找出切点。另外，为了图形简洁，我们做圆与其他图形的交点时，往往不是作出一个整圆，而只作出一段圆弧即可。

第二章 基本作图

第一节

基本作图

基本作图没有具体的定义。在第一章中提到，凡是尺规作图有解的作图问题，都可以通过执行一连串的作图公法实现。对相对简单的问题，公法作图的步骤及作图原理一目了然，而对复杂问题，作图步骤可能多达几十步甚至上百步，全用作图公法一步步描述及画出，图形非常复杂，令人眼花缭乱，作图原理也不容易看出。所以为了描述方便，一般将相对简单的作图归类为基本作图，复杂作图由这些基本作图叠加就行了。一些基本作图如：

（1）作一条线段等于已知线段；

（2）作一个角等于已知角；

（3）作已知角的角平分线；

（4）过一点作已知直线的垂线；

（5）作出已知两点间的任意等分点；

（6）加法、减法（已知线段 a，b，作长度等于 $a+b$、$a-b$ 的线段）；

（7）乘法、除法（已知线段 a，b 及单位长度线段 c，也就是 $c=1$，作出长度等于 ab、a/b 的线段）；

（8）开平方（已知线段 a 及单位长度线段 c，也就是 $c=1$，作出长度等于 $\sqrt{a}$ 的线段）。

从上面几条可以看出，对已知量的加、减、乘、除及开方作图问题，尺规作图都可以实现，具体的“尺规作图可能性判定准则”是：如果一个给定作图问题所求未知量，能由若干个已知量的有限次有理运算及开平方运算得到，那么这个作图问题可以仅用尺规作出，否则不能仅由尺规作出。

应当指出，线段是一个量，加减法是直接对量的运算，所以作图过程不必先定义单位量的大小（当然，非要定义单位量也是可以的）；乘法是对 n 个相同量的加法，这个“n”是一个数不是一个量，不定义单位量无法知道 n 值大小，所以乘法作图需要预先定义单位量大小；线段相除，结果是一个数，不是一个量，不定义单位量，无法知道结果数值大小，所以除法作图也需要预先定义单位量的大小；同样开方也涉及数的运算，也需定义单位量的大小后作图才能进行。

第二节
基本作图详解

1．作线段等于已知线段

已知线段 *AB* 和一点 *C*，过 *C* 点求作一线段等于 *AB*。

作法：

（1）过 *C* 点作任意直线 *l*，如图 2-2-1 所示。

（2）以 *C* 点为圆心，*AB* 长为半径作弧，交直线 *l* 于 *D* 点，则 *CD* 为所作线段。

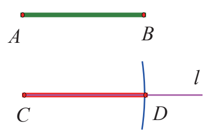


图 2-2-1

2．作一个角等于已知角

已知∠*CAB*，求作一角等于∠*CAB*。

作法：

（1）以 *A* 点为圆心，任意长度为半径作弧，交 *AC* 于 *D* 点，交 *AB* 于 *E* 点，如图 2-2-2 所示。

（2）任取一点 *A*'，过 *A*'点作任意直线 *l*。

（3）以 *A*'点为圆心，*AE* 长为半径作弧，交直线 *l* 于 *E*'点。

（4）以 *E*'点为圆心，*DE* 长为半径作弧，交⊙*A*'于 *D*'点。

（5）作射线 *A*'*D*'，则∠*D*'*A*'*E*'为所作角。

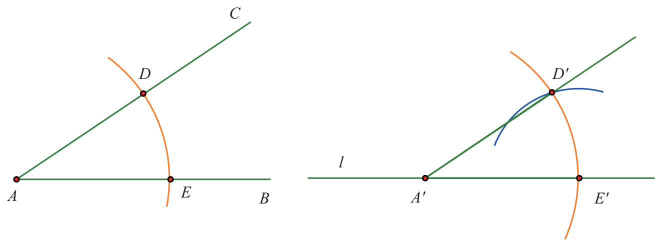


图 2-2-2

3．作角平分线

已知∠*CAB*，求作∠*CAB* 的角平分线。

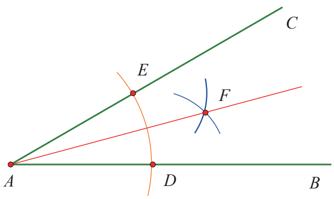


图 2-2-3

解法一：经典作法

点评：此作法可以平分任意角

作法：

（1）以顶点 *A* 为圆心，任意长为半径作弧，交 *AC* 于 *E* 点，交 *AB* 于 *D* 点，如图 2-2-3 所示。

（2）分别以 *E*、*D* 点为圆心，*ED* 为半径作弧，交点为 *F* 点。

(3)作射线 AF，则 AF 为 $\angle CAB$ 的角平分线。

解法二：

点评：此作法不可以平分平角。

作法：

(1)以 A 点为圆心，任意长为半径作弧，交 AC 于 E 点，交 AB 于 D 点，如图 2-2-4 所示。

(2)以 A 点为圆心，以不等于 AD 长度的线段为半径作弧，交 AC 于点 G，交 AB 于点 F。

(3)连结 EF、DG，交点为 H。

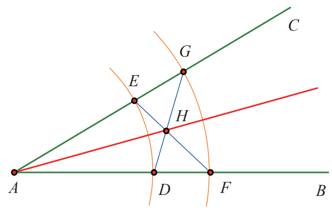


图 2-2-4

(4)作射线 AH，则 AH 为 $\angle CAB$ 的角平分线。

解法三：

点评：此作法不可以平分平角。

作法：

(1)以 A 点为圆心，任意长为半径作弧，交 AC 于点 E，交 AB 于点 D，如图 2-2-5 所示。

(2)以 D 点为圆心，AD 为半径作弧，交 AB 于点 F。

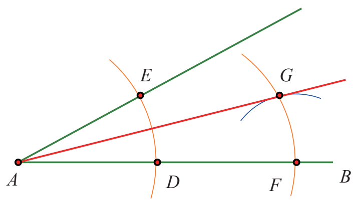


图 2-2-5

(3)以 F 点为圆心，ED 长为半径作弧，交⊙D 于点 G。

(4)射线 AG，则 AG 为 $\angle CAB$ 的角平分线。

解法四：

点评：此作法不可以平分平角。

作法：

(1)以 A 点为圆心，任意长为半径作弧，交 AB 于点 D，交 AC 反向延长线于点 E，如图 2-2-6 所示。

(2)以 D 点为圆心，AD 为半径作弧，交 AB 于点 F。

(3)以 E 点为圆心，EF 为半径作弧，交⊙D 于点 G。

(4)作射线 AG，则 AG 为 $\angle CAB$ 的角平分线。

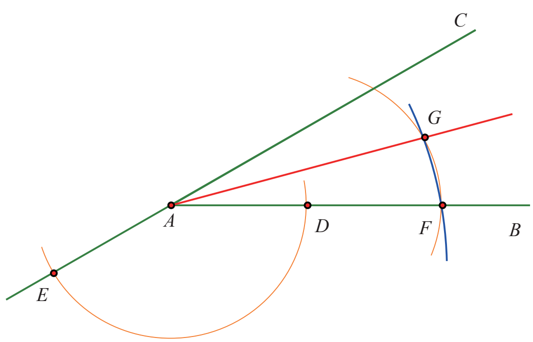


图 2-2-6

解法五：

点评：此作法不可以平分平角。

作法：

（1）以 A 点为圆心，任意长为半径作弧，交 AC 于点 D，交 BA 的反向延长线于点 E，如图 2-2-7 所示。

（2）以点 E 为圆心，ED 长为半径作弧交 AB 于点 F。

（3）作直线 FD。

（4）以 A 点为圆心，AF 长为半径作弧，交 FD 于点 G。

（5）作射线 AG，则 AG 为 $\angle CBA$ 的角平分线。

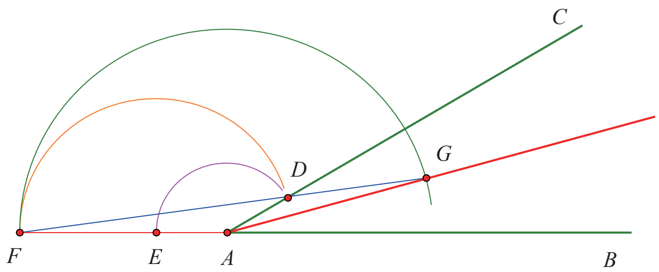


图 2-2-7

对解法五推广到 2^n 等分线

用尺规求作角的 2^n 等分线。

点评：这种作图，等分越多，越显步骤简化。

作法：（以四等分为例）

（1）以点 A 为圆心，任意长为半径作弧，交 AB 于点 D，交 CA 的延长线于点 E，如图 2-2-8 所示。

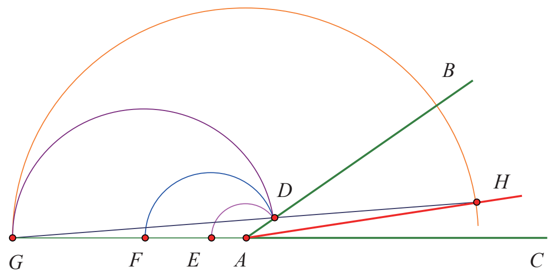


图 2-2-8

（2）以点 E 为圆心，ED 长为半径作弧，交 AC 于点 F。

（3）以点 F 为圆心，FD 长为半径作弧，交 AC 于点 G。

（4）作直线 GD。

（5）以点 A 为圆心，AG 长为半径作弧，交 GD 于点 H。

（6）作射线 AH，则 AH 为 $\angle BAC$ 的 1/4 等分线。

解法六：

点评：此作法不可以平分平角。

作法：

（1）在 AB 上任取一点 D，以 D 点为圆心，以 AD 为半径作弧，交 AB 于点 E，如图 2-2-9 所示。

（2）以点 A 为圆心，AE 为半径作弧，交 AC 于点 F。

（3）连结 EF，交⊙D 于点 G。

（4）作射线 AG，则 AG 为 $\angle CAB$ 的角平分线。

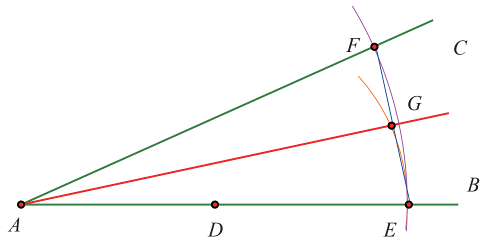


图 2-2-9

对解法六推广到 2^n 等分线

用尺规求作出角的 2^n 等分线。

（1）在 AC 上任取一点 D 为圆心，以 AD 长为半径作圆，交 AC 于点 E，如图 2-2-10 所示。

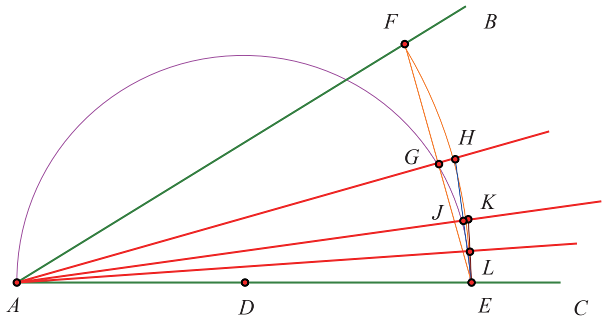


图 2-2-10

（2）以点 A 为圆心，AE 为半径作弧，交 AB 于点 F。

（3）连结 EF，交⊙D 于点 G。

（4）作射线 AG，交⊙D 于点 H。

（5）连结 EH，交⊙D 于点 J。

（6）作射线 AJ，交⊙D 于点 K。

（7）连结 EK，交⊙D 于点 L。

（8）作射线 AL。

不断重复，AH、AK、AL 分别为 $\angle BAC$ 的 2、4、8 等分线。

解法七：

点评：此作法不可以平分平角。

作法：

（1）以 A 点为圆心，任意长为半径作弧，交 AB 于 D，交 AB 的反向延长线于点 E，交 AC 于点 F，如图 2-2-11 所示。

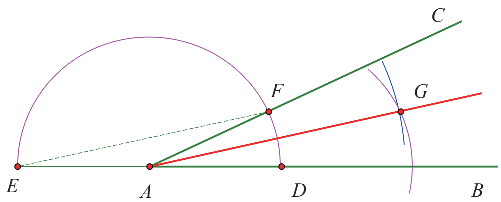


图 2-2-11

（2）以 D 点为圆心，AD 长为半径作弧。

（3）以 A 点为圆心，EF 长为半径作弧，交⊙D 于点 G。

（4）作射线 AG，则 AG 为 $\angle CBA$ 的角平分线。

对解法七推广到 2^n 等分线

用尺规求作角的 2^n 等分线，以四等分为例。

（1）以点 A 为圆心，任意长为半径作弧，交 AB 于点 D，交 CA 的延长线于点 E，如图 2-2-12 所示。

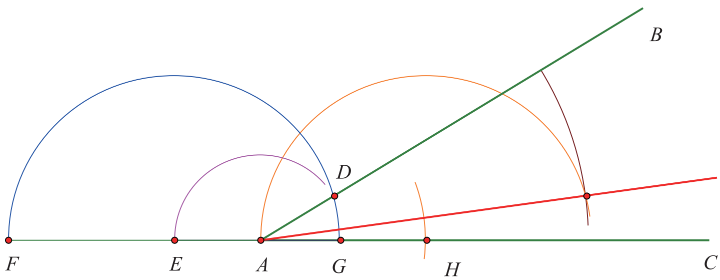


图 2-2-12

（2）以点 E 为圆心，ED 长为半径作弧，交 AC 于 F、G 两点。

要 2^n 等分一个角，只需作出 n 个圆，若四等分，则这里只需作出第二个⊙E 即可止。暂且称最后这个圆 E 为大圆，圆心 E 为大圆心，大圆与 AC 在 A 点右边的交点 G 称作基点。大圆里 FD 称作等分线。

（3）以 A 点为圆心，以大圆心 E 到基点 G 的长度 GE 为半径作弧，交 AC 于点 H。

（4）以 H 点为圆心，AH 为半径作弧。

（5）以 A 点为圆心，以等分线 FD 长为半径作弧，交⊙H 于点 J。

（6）作射线 AJ，则 AJ 为 $\angle BAC$ 的 4 等分线。

附：如果不要求作出角平分线，而只需作出原角一半的角，则下面方法最简单。

已知 $\angle CAB$，求作 $\angle CAB$ 的一半。

作法：

（1）做出直线 AB，如图 2-2-13 所示。

（2）以 A 点为圆心，任意长为半径作弧，交 AB 直线于 D，交 AC 于 E。

（3）连结 DE，则 $\angle EDA=\frac{1}{2}\angle CAB$。

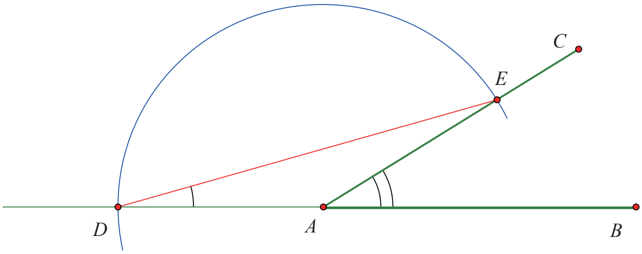


图 2-2-13

4．作垂线

情况一：过直线上一点作已知直线的垂线

已知直线 l 和直线 l 上一点 A，过点 A 求作直线 l 的垂线。

作法：（常规作法）

解法一：

（1）以 A 点为圆心，任意长为半径作弧，交直线 l 于 B、C 两点，如图 2-2-14 所示。

（2）分别以 B、C 点为圆心，大于 AB 长为半径作弧，交点为 D。

（3）作直线 AD，则 AD 为直线 l 的垂线。

解法二：

作法：

（1）任取直线 l 外一点 B 为圆心，AB 长为半径作弧，交直线 l 于点 C，如图 2-2-15 所示。

（2）作直线 BC，交⊙B 于点 D。

（3）作直线 AD，则 AD 为直线 l 的垂线。

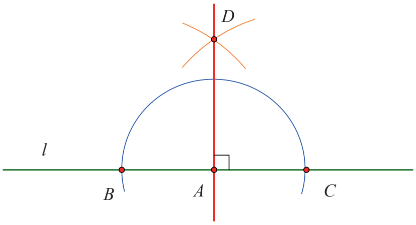


图 2-2-14

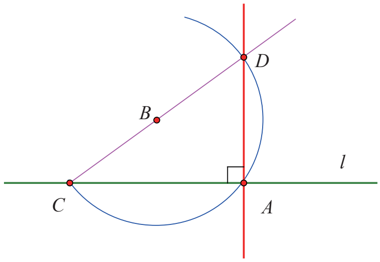


图 2-2-15

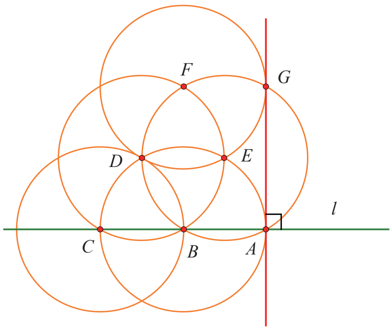


图 2-2-16

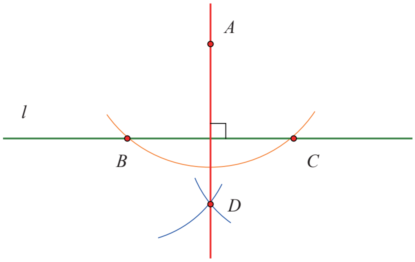


图 2-2-17

解法三：

作法：

（1）如图 2-2-16 所示作出等大的五个圆，其中点 B、C 在直线 l 上，找到 G 点。

（2）作直线 AG，则 AG 为直线 L 的垂线。

情况二：过直线外一点作已知直线的垂线

已知直线 l 和直线 l 外一点 A，过点 A 求作直线 l 的垂线。

解法一：

作法：

（1）以 A 点为圆心，大于 A 点到直线 l 的距离为半径作弧，交直线 l 于 B、C 两点，如图 2-2-17 所示。

（2）分别以 B、C 点为圆心，大于 BC 距离的一半为半径作弧，交点为点 D。

（3）作直线 AD，则 AD 为直线 l 的垂线。

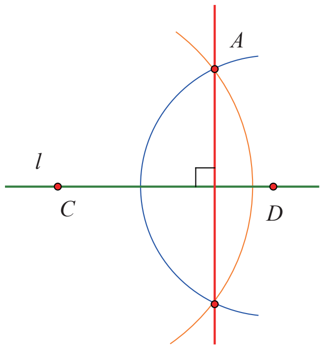


图 2-2-18

解法二：

作法：

（1）在直线 l 上任取一点 C，以点 C 为圆心，AC 为半径作弧，如图 2-2-18 所示。

（2）在直线 l 上任取一点 D，以点 D 为圆心，AD 为半径作弧，交⊙C 于点 E。

（3）作直线 AE，则 AE 为直线 l 的垂线。

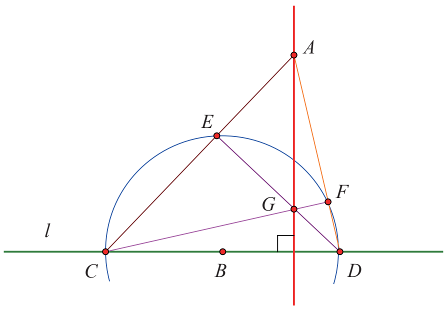


图 2-2-19

解法三：

作法：

（1）在直线 l 上任取一点 B，以 B 点为圆心，任意长为半径作半圆，与直线 l 的交点为 C、D 两点，如图 2-2-19 所示。

（2）连结 AC，与⊙B 交点为 E。连结 AD，与⊙B 交点为 F。

（3）连结 ED、FC，交点为 G。

（4）作直线 AG，则 AG 为直线 l 的垂线。

5．作平行线

过直线外一点作平行线，可以利用平行线的特征来作图，如图 2-2-20 所示，例如：同位角相等的两直线平行（$\angle DEB=\angle DFA$）；同时垂直于同一直线的两直线平行（$BH\perp HG$，$AG\perp HG$）；内错角相等的两直线平行（$\angle BEF=\angle DFG$）等，但都比较复杂，下面介绍一些简单的作图。

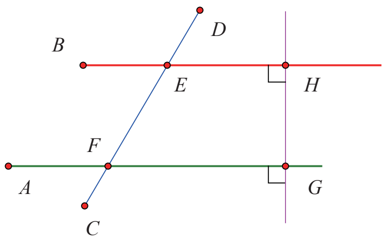


图 2-2-20

已知直线 l 和直线外一点 A，过点 A 求作 l 的平行线。

解法一：

作法：

（1）在直线 l 上任取一点 B 为圆心，以 AB 为半径作弧，和直线 l 的交点为 C、D，如图 2-2-21 所示。

（2）以点 D 为圆心，AC 长为半径作弧，与⊙B 交点为 E。

（3）作直线 AE，则 AE 为直线 l 的平行线。

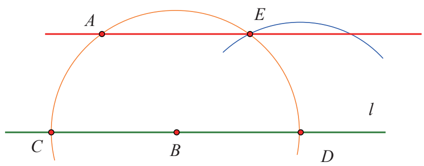


图 2-2-21

解法二：

作法：

（1）在直线 l 外任取一点 B 为圆心，以 AB 为半径作弧，如图 2-2-22 所示。

（2）连结 AB，和直线 l 的交点为 C。

（3）以 B 点为圆心，BC 为半径作弧，交直线 l 于点 D。

（4）作直线 BD，和以 B 点为圆心，AB 为半径的圆交于点 E。

（5）作直线 AE，则 AE 为直线 l 的平行线。

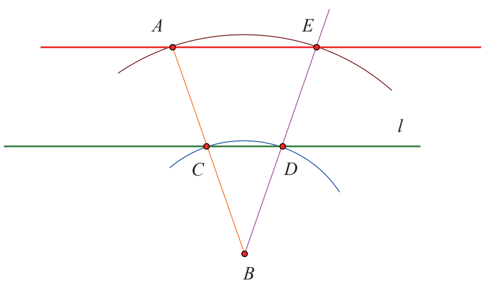


图 2-2-22

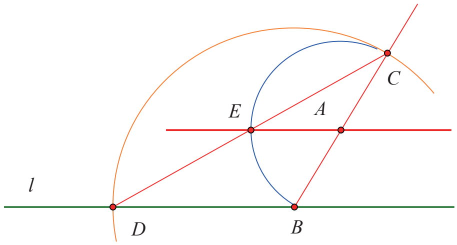


图 2-2-23

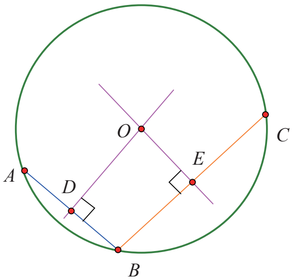


图 2-2-24

解法三：

作法：

（1）在直线 l 上任取一点 B，作出直线 AB，如图 2-2-23 所示。

（2）以 A 点为圆心，AB 长为半径作弧，与 AB 直线的交点为点 C。

（3）以 B 点为圆心，BC 为半径作弧，交直线 l 于点 D。

（4）连结 CD，交⊙A 于点 E。

（5）作直线 AE，则 AE 为直线 l 的平行线。

6．作圆心

已知平面上有一圆周，圆心未知，求作其圆心。

解法一：

作法：

（1）在圆周上任取 A、B、C 三点，如图 2-2-24 所示。

（2）作出线段 AB、BC 的垂直平分线（D、E 为其中点），垂直平分线的交点 O 为圆心。

解法二：

作法：

（1）如图 2-2-25 所示，在圆周上作出任意等大的四个圆，得到交点 A、B、C、D。

（2）作出直线 AC、BD，交点为 E，则 E 点为所求圆心。原理是作出两条弦的垂直平分线，其交点必为圆心。

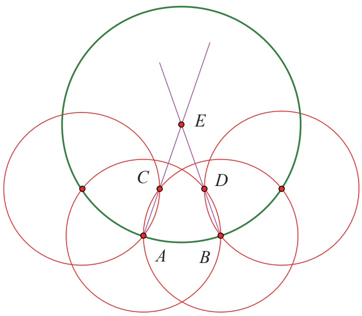


图 2-2-25

解法三：

作法：

（1）在圆外任取一点 A 作圆心，任意长为半径作圆，交原圆周于 B、C 两点，

如图 2-2-26 所示。

（2）作出直线 AB、AC，与⊙A 交点为 D、E。

（3）作直线 DB、EC，与原圆周交点为 F、G。

（4）连结 BG、FC，交点为 H，则 H 点为所求圆心。

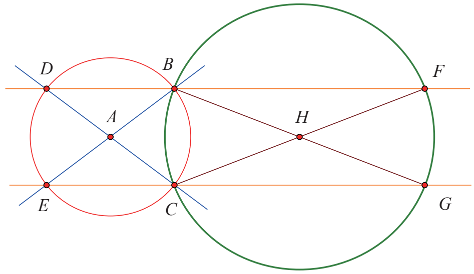


图 2-2-26

解法四：

作法：

（1）在圆外任取一点 A 作圆心，两次不同任意长为半径作弧，交原圆周于点 B、C、D、E，如图 2-2-27 所示。

（2）连结 CD、BE，交点为 F。

（3）作直线 AF，与原圆周交点为 H、G。

（4）以 H 为圆心，BG 为半径作弧，交原圆周于点 I。

（5）连结 B、I，与 AF 的交点为 J 点，则 J 点为所求圆心。

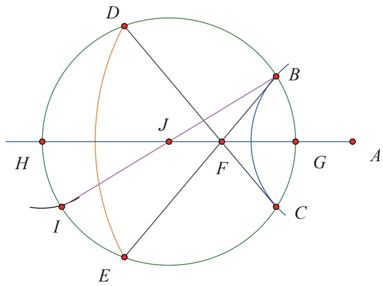


图 2-2-27

7．作内公切线

内公切线作法原理：

作出两圆的两条平行半径 AC、BD，CD 直线与圆心连线 AB 的交点 E 为两圆的内公切点，过内公切点作两圆的切线就是两圆的内公切线，如图 2-2-28 所示。

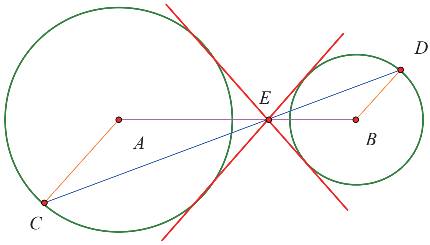


图 2-2-28

已知⊙A、⊙B 及其圆心 A、B，尺规作图求作两圆内公切线。

解法一：

作法：

（1）连结 AB，交⊙A 于点 C，交⊙B 于点 D，如图 2-2-29 所示。

（2）以 C 点为圆心，AC 为半径作弧，交⊙A 于点 E。

（3）以 D 点为圆心，BD 为半径作弧，交⊙B 于点 F。

（4）连结 EF，交 AB 于点 G。

（5）分别以 A、G 为圆心，AG 为半径作弧，交点为 J、K。
（6）连结 JK，交 AB 于点 L。
（7）以 L 点为圆心，AL 为半径作圆，交⊙A 于点 M、N。
（8）作直线 MG、NG。则 MG，NG 为⊙A 和⊙B 的两条内公切线。

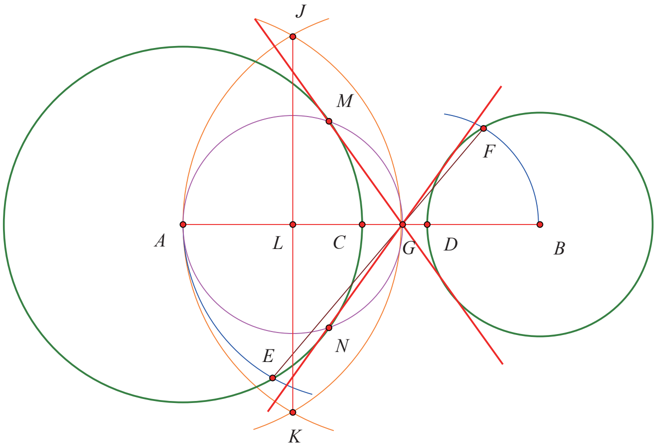


图 2-2-29

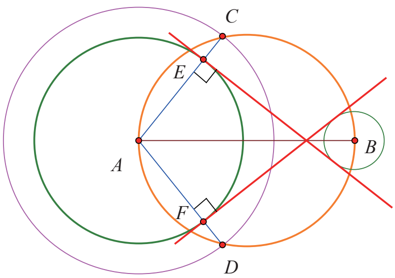


图 2-2-30

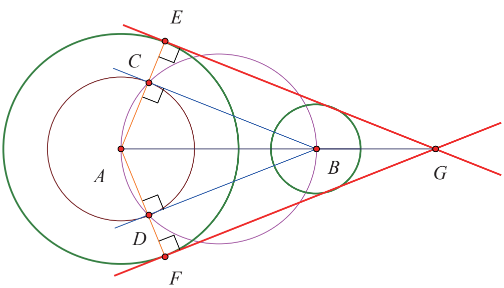


图 2-2-31

解法二：

作法：

（1）以两个圆心距离为直径作圆，以 A 点为圆心，两个圆的半径长之和为半径作圆，两圆交点为 C、D，如图 2-2-30 所示。

（2）连结 AC、AD，与⊙A 的交点为 E、D。

（3）过 E、D 作 AC、AD 的垂线就是两圆的内公切线。

8．作外公切线

两圆外公切线作法原理（见图 2-2-31）：

以两圆的圆心距离为直径作圆，以 A 点为圆心，两圆半径之差为半径作圆，两圆交于 C、D。连结 BC、BD，作直线 AC、AD，与⊙A 分别交于 E、F 两点。过 E、F 作 BC、BD 的平行线（或者过 E、F 作 AC、AD 的垂线）

即为两圆的外公切线。

已知⊙A、⊙B 及其圆心 A、B，尺规作图求其外公切线。

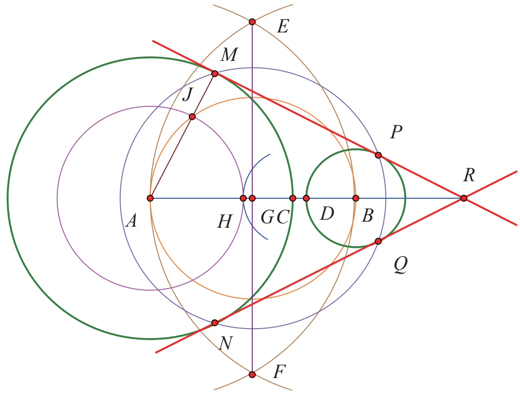


图 2-2-32

解法一：

作法：

（1）连结 AB，交⊙A 于点 C，交⊙B 于点 D，如图 2-2-32 所示。

（2）分别以 A、B 为圆心，AB 为半径作弧，交点为 E、F。

（3）连结 EF，交 AB 于点 G。

（4）以 C 点为圆心，BD 长为半径作弧，交 AB 于点 H。

（5）以 G 点为圆心，AG 为半径作圆。

（6）以 A 点为圆心，AH 为半径作圆，交⊙G 于点 J。

（7）作直线 AJ，交以 AC 为半径的⊙A 于 M。

（8）以 G 点为圆心，MG 为半径作圆，交⊙A 于点 N，交⊙B 于 P、Q 两点。

（9）作直线 MP、NQ，则 MP、NQ 为⊙A 和⊙B 的外公切线，交点 R 为外公切点。

解法二：

作法：

（1）作直线 AB，交⊙A 于点 C，交⊙B 于点 D，如图 2-2-33 所示。

（2）以 C 点为圆心，AC 为半径作弧，交⊙A 于点 E；以 D 点为圆心，BD 为半径作弧，交⊙B 于点 F。

（3）作直线 EF，交 AB 于点 G。

（4）作出 BG 的中点 H。

（5）以 H 点为圆心，HB 为半径作圆，交⊙B 于 J、K 两点。

（6）连结直线 JG、KG，则两直线为两圆外公切线。

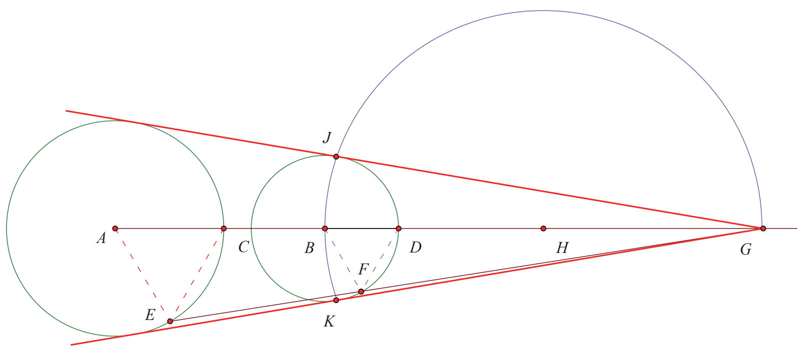


图 2-2-33

9. 作线段中点

已知线段 AB，求作其中点。

作法：

（1）分别以 A、B 点为圆心，以大于 AB 长度的一半作相等弧，交点为 C、D，如图 2-2-34 所示。

（2）作直线 CD，与 AB 的交点为 E，则 E 点为线段 AB 的中点。同时，直线 CD 垂直于线段 AB。

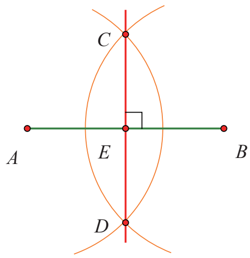


图 2-2-34

10. 作线段任意等分点

已知线段 AB，求作任意等分点。

解法一：

如图 2-2-35 所示，一般的，若 $BC=\dfrac{AB}{n}$，并且 $BC\perp AB$，$\angle DBA=45°$，BD 与 AC 的交点为 D 点，过 D 作 $DE\perp AB$，则 $BE=\dfrac{1}{n+1}AB$，利用这个原理可以作出任意等分点。

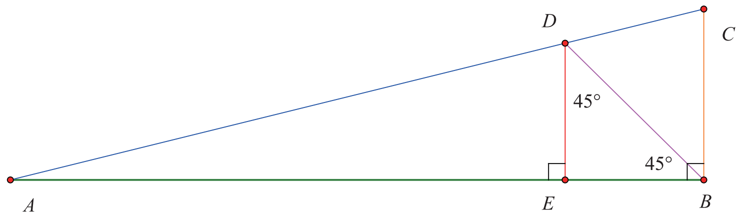


图 2-2-35

解法二：

作法：

（1）在 AB 的延长线上作出等距的 B、C、D、E...点，它们之间的距离都等于 AB 长度的一半，如图 2-2-36 所示。

（2）以 A 点为圆心，AB 长为半径作圆。

（3）以该点为圆心，该点到 A 点的距离为半径作弧，弧与⊙A 有两个交点。

（4）连结两个交点，连线与线段 AB 的交点就是欲求的线段 AB 的等分点。

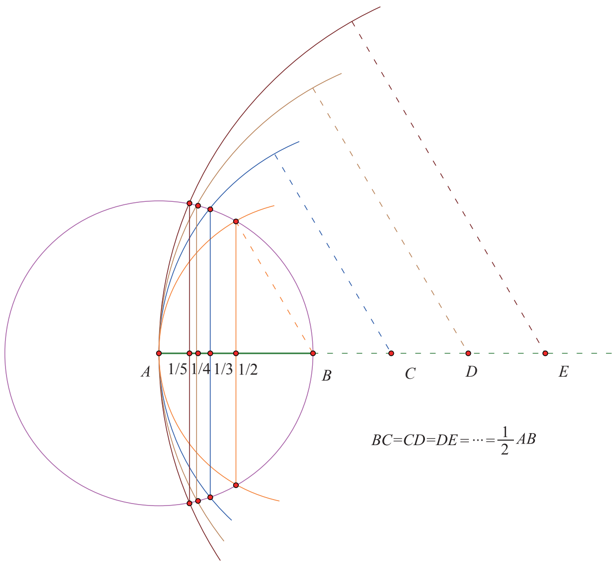


图 2-2-36

解法三：

作法：

（1）过 A 点作任意直线，在其上截取 n 段长度相等的线段，如图 2-2-37 所示。

（2）连结 A_nB 并延长，截取 $BE=A_nB$。

（3）连结 EA_{n-1}，与 AB 的交点为 D，此时 $BD=\dfrac{1}{2n-1}AB$。

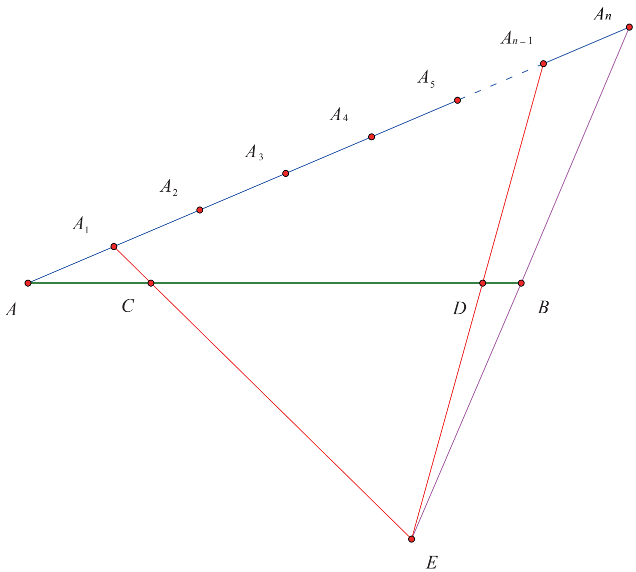


图 2-2-37

（4）连结 EA_1，连线与 AB 的交点为 C，此时 $AC=\dfrac{2}{n+1}AB$。

说明：此种方法任意等分线段步骤比较少。是一种比较理想的任意等分线段作图法。

解法四：

原理：

（1）过 A、B 作直线 AD 平行于 BC，如图 2-2-38 所示。

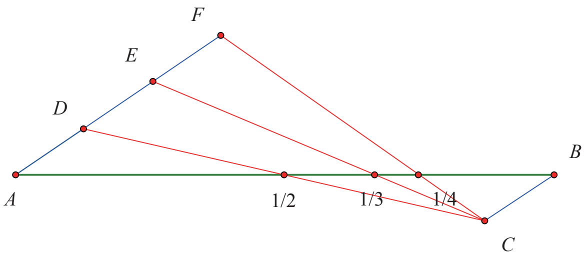


图 2-2-38

（2）在 AD 上截取若干个等距离的点 $AD=DE=EF$……在 BC 上截取 $BC=AD$。

（3）如图 2-2-38 所示连结相应的点到 C 点，连线和 AB 的交点即为所求的等分点。

提示：作两平行线，虽然只要求平行即可，但一般选取与 AB 直线成 90°或 60°夹角，这样便于作图。

参考作法如图 2-2-39 所示。

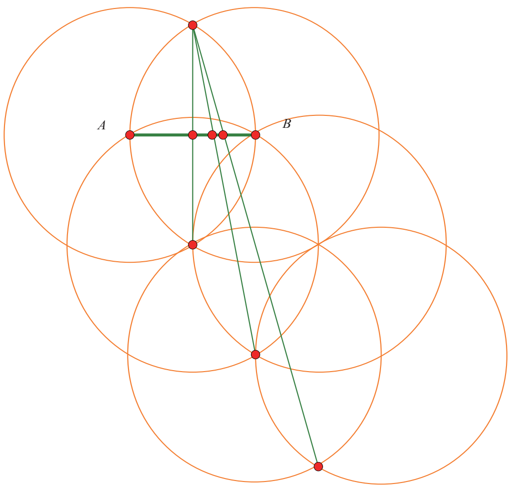


图 2-2-39

解法五：

作法：

此图以五等分为例。

（1）如图 2-2-40 所示，作 AB 的平行线，在上面截取五段相等的线段，$CD=DE=EF=FG=GH$。

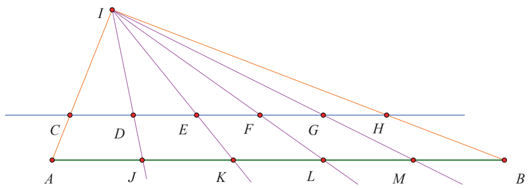


图 2-2-40

（2）作直线 AC、BH，交于 I 点。

（3）作直线 ID、IE、IF、IG，和线段 AB 的交点为 J、K、L、M，即为五等分点。其余任意等分点可参考此种作法。

解法六：

1995 年，美国格林法姆学校的数学教师查理德斯（Charlie Dietrich）给两个初二学生大卫·戈登海姆（David Goldenheim）和丹·里奇弗德(Dan Litchfield）布置作业：把一条给定的线段任意等分。不到两个小时两位学生即解决了这个问题。有 23 年教龄的德斯看到这种方法非常独特，便将其命名为 GLaD 构造。

作法：

作出矩形，连结两条对角线，过交点作底边的垂线，得到二等分点，之后不断从长方形的右上顶点与之前作出的等分点连线及作底边 AB 的垂线，得到线段 AB 的任意等分点，如图 2-2-41 所示。

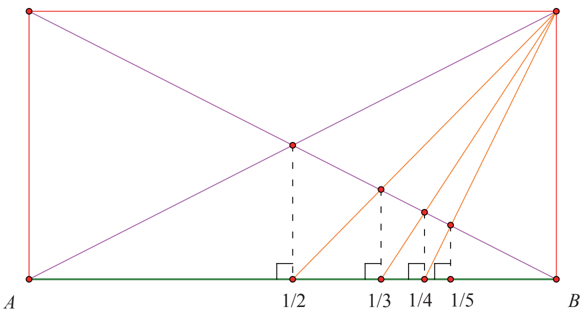


图 2-2-41

解法七：

作法：

（1）如图 2-2-42 所示，以线段 AB 为直径作一个半圆。

（2）作 $BC\perp AB$，且 $AB=BC$。

（3）如图所示，反复以 B 点为圆心作弧以及连结 A 点，在⊙A 上作 AB 的垂线，得到的点就是所求的等分点。

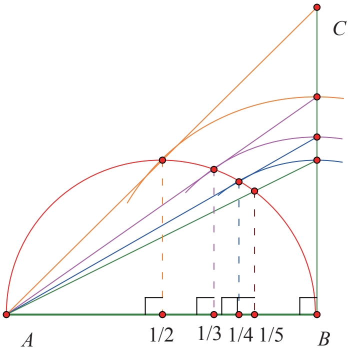


图 2-2-42

解法八：

作法：

（1）作出任意△*ABC*，如图 2-2-43 所示。

（2）在 *AC* 上任取一点 *D*，作 *DE*//*AB*。

（3）连结 *BD*、*AE* 交于点 *F*

（4）作直线 *CF*，交 *AB* 于点 *G*，则 *G* 为 *AB* 的中点。连结 *GD* 交 *AE* 于点 *H*，作直线 *CH* 得到 $\frac{1}{3}$ 点。

顺次下去可以得到任意等分点。

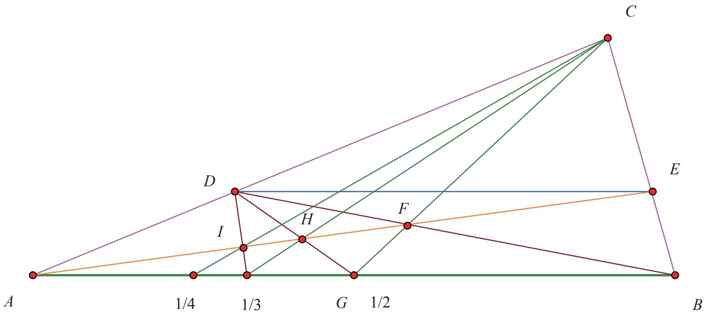


图 2-2-43

解法九：

点评：此作法无法平分线段。

作法：

（1）作 *AB* 的中点 *C*，如图 2-2-44 所示。

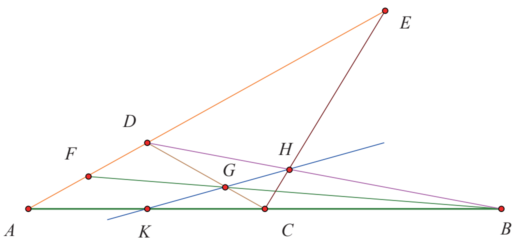


图 2-2-44

（2）过 A 点作任意直线 *AE*，在 *AE* 上任取一点 *D*。

（3）作点 *E*，使得 *DE*=*nAD*

（4）作 *AD* 的中点 *F*。

（5）连结 BF、CD，交点为 G。

（6）连结 BD、CE，交点为 H。

（7）作直线 GH，交 AB 于点 K，则 $AK=\dfrac{1}{n+2}AB$。

解法十：

作法：（以三等分为例）

（1）过 A 点作直线 AD，作 AB 的反向延长线 AC。以任意长度截取 AC:CD=3:2，如图 2-2-45 所示。

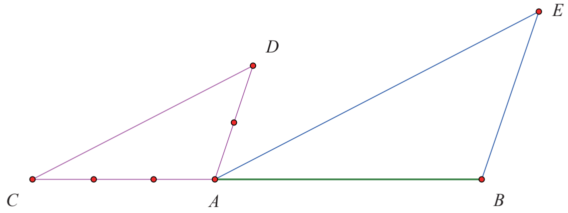


图 2-2-45

（2）作△AEB 的相似三角形△ABE。

（3）作 BE 的 1/2 线段，其等于$\dfrac{1}{3}AB$。

原理：要 n 等分 AB，则在 AC 上作出 n 段相等的线段，然后在 AD 上截取两段相等的线段，那么对于相似三角形△AEB，$\dfrac{1}{2}BE$ 就等于$\dfrac{1}{n}AB$。

解法十一：

作法：

（1）在直线 AB 上截取若干等距点 D、E、F、G、…，$DE=EF=FG=\cdots=AB$。

（2）作 $BC\perp AB$，$DJ\perp AB$，并且 $BC=AB$。

（3）如图 2-2-46 所示，连结相应的点到 C 点，和直线 DJ 的交点为 H、I、J、…

（4）分别以 C 点为圆心，以 CH、CI、CJ 为半径作弧，和 AB 的交点即为 AB 的 1/2、1/3、1/4、…等分点。

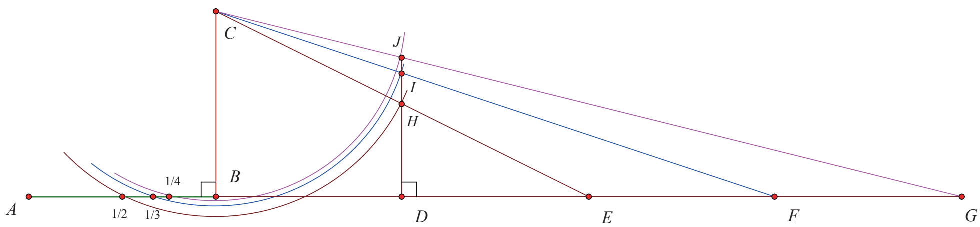


图 2-2-46

附：三等分一条线段

如图 2-2-47 所示，若图中标出的三个角都是 30°，∠CBA=90°，那么 $BD=\dfrac{1}{3}AB$。这种做法是个特例，不可推广到任意等分线段。

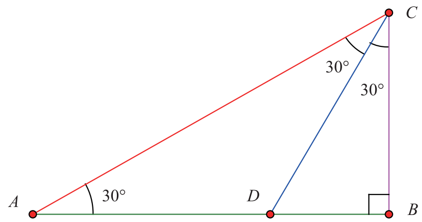


图 2-2-47

11．线段加减

已知线段 AB、CD，求作 $AB+CD$，$AB-CD$。

作法：

（1）作任意直线，在其上任取一点 E 为圆心，AB 长为半径作弧，与直线交点为 F，如图 2-2-48 所示。

（2）以 F 点为圆心，CD 长为半径作弧，与直线交点为 G、H。此时有 $EH=AB+CD$，$EG=AB-CD$。

12．线段乘除

线段乘除涉及数的运算，所以要先规定单位量的大小才能作图。

已知两线段及单位长度线段，求作两线段的积和商

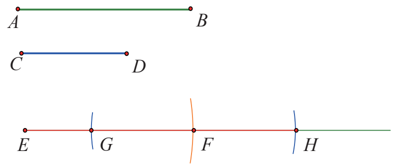


图 2-2-48

原理：三角形相似。

线段积的作法：

（1）作线段 AC，截取 $BC=1$，相乘线段 AB，如图 2-2-49（a）所示。

（2）作另一直线 CD，截取相乘线段 CD。

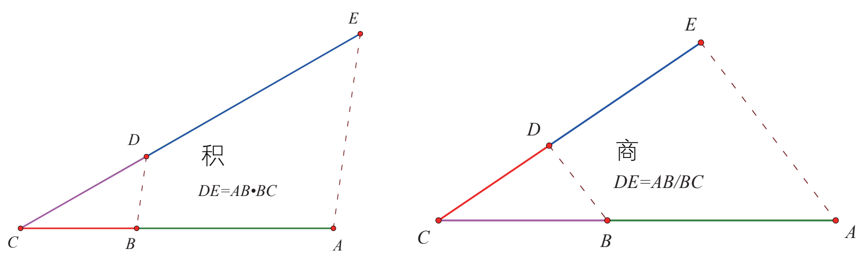
（3）连结 BD，过 A 点作 BD 的平行线，交 CD 的延长线于点 E，则 $DE=AB \cdot CD$。

线段商的作法：

（1）作直线 CD，截取 $CD=1$，如图 2-2-49（b）所示。

（2）作另一直线 CA，并截取两段相除的线段 AB 和 BC。

（3）连结 BD，过 A 点作 BD 的平行线，与 CD 延长线交于点 E，则 $DE=AB/BC$。



（a）　　（b）

图 2-2-49

解法二：

原理：圆内相交弦定理

线段积的作法：

（1）作线段 AC，截取相乘线段 AB 和 BC，如图 2-2-50（a）所示。

（2）过 B 点任作另一线段 BD，截取单位线段 $BD=1$。

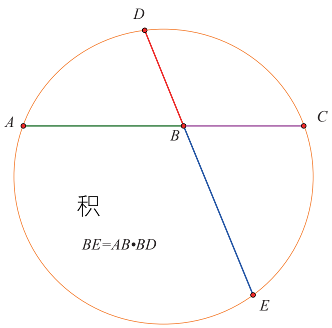
（3）过 A、D、C 三点作圆，与 BD 的延长线交于 E 点，则 $BE=AB\cdot BC$。

线段商的作法：

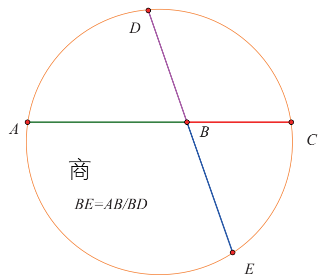
（1）作线段 AC，截取相除线段 AB 和单位线段 $BC=1$，如图 2-2-50（b）所示。

（2）过 B 点任作另一线段，截取相除线段 BD。

（3）过 A、D、C 三点作圆，与 DB 的延长线交于 E 点，则 $BE=AB/BD$。



（a）



（b）

图 2-2-50

13. 线段开方

线段开方涉及数的运算，所以需要先规定量的大小才能作图，如图 2-2-51 所示。

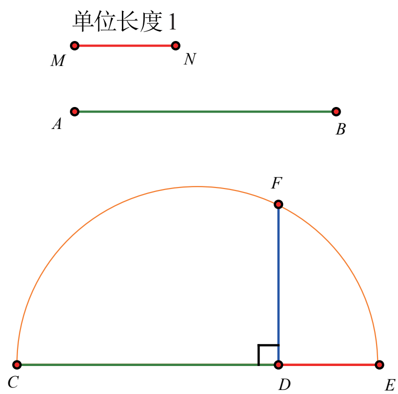


图 2-2-51

已知线段 AB 以及单位长度线段 $MN=1$，求作 $\sqrt{AB}$ 。

作法：

（1）作直线 CE，截取 $CD=AB$，$DE=MN=1$。

（2）以 CE 为直径作圆。

（3）过点 D 作 $DF\perp CE$，与圆的交点为 F，则 $FD=\sqrt{AB}$。

14．比例中项

已知 $AB=a$，$BC=b$，求作 AB 和 BC 的比例中项，即 $\sqrt{ab}$。

作法：

（1）以 AC 为直径作半圆，如图 2-2-52 所示。

（2）过 B 点作 AC 的垂线，与半圆交于 D 点。则 $BD=\sqrt{ab}$，即 BD 为 AB 和 BC 的比例中项。

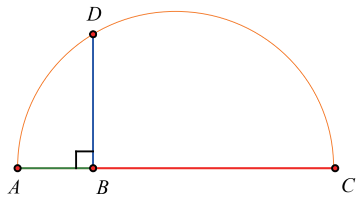


图 2-2-52

第三章 尺规作图

本章介绍一些比较有代表性和趣味性，相对简单的尺规作图的例子。其中多边形的分割与拼合问题的尺规作图法并不复杂，难点在于寻求分割与拼合的方法，解法多种多样；太极阴阳图很优美，尺规作图绘制也很简单，这里重点讨论太极阴阳图的图形大小比例问题。

第一节 正三角形问题

1．已知三条平行线，作一正三角形，要求三角形的三个顶点在三条平行线上

解法一：

作法：

（1）作出三条平行线的垂线 AC，如图 3-1-1 所示。

（2）作出 AB 的中点 D。

（3）过 D 点作 $DE /\!/ AF$。

（4）作 $\angle DCE=30°$，CE 直线与 DE 直线交于 E 点。

（5）作直线 BE，交 AF 于 F 点，则 BF 为等边三角形的一条边。

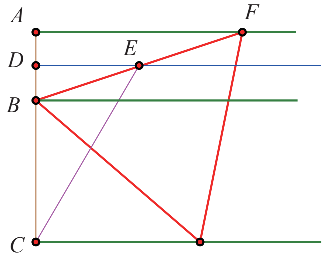


图 3-1-1

解法二：

作法：

（1）在两条平行线之间作出正三角形△ABC，如图 3-1-2 所示。

（2）作直线 AC，交另一条平行线于点 D。

（3）以 BD 为边作出正三角形 BDE，则△BDE 为所作等边三角形。

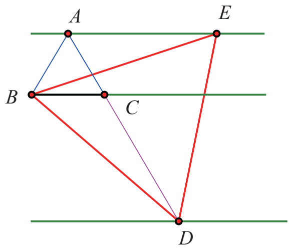


图 3-1-2

2．已知三角形及边上一点，以该点为一个顶点作三角形的内接正三角形

已知△ABC，D 为 AC 边上一点，求作△ABC 的内接正三角形，其一个顶点为 D 点。

作法：

（1）在 BC 边任取两点 E、F，如图 3-1-3 所示。

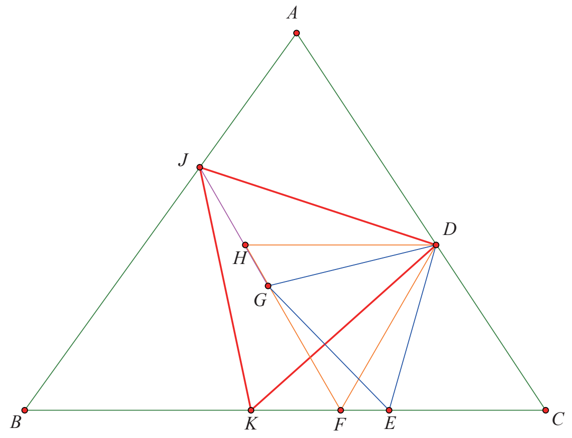


图 3-1-3

（2）以 DE、DF 为边作正三角形，得到顶点 G、H。

（3）作直线 GH，交 AB 于点 J。

（4）以点 D 为圆心，DJ 为半径作弧，交 BC 于点 K，则△JKD 为正三角形。

3．作三角形的最小内接正三角形

已知△ABC，作其内接最小正三角形。

解法一：

作法：

（1）在△ABC 的最小边 AC 向外作正三角形△ACD，如图 3-1-4 所示。

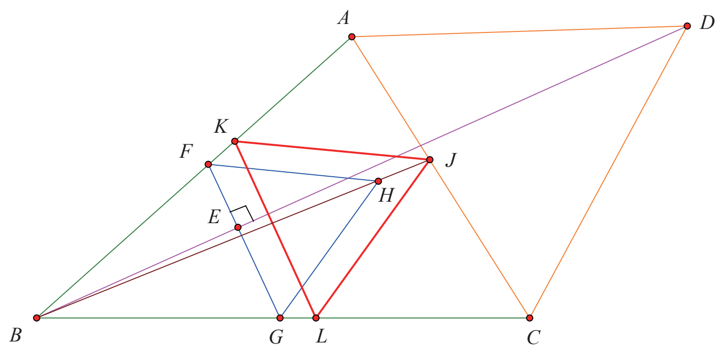


图 3-1-4

（2）连结 BD。

（3）在 BD 上任取一点 E，过点 E 作 BD 的垂线，交 AB 于点 F，交 BC 于点 G。

（4）以 FG 为边作正三角形 $\triangle FGH$。

（5）作直线 BH，交 AC 于点 J。

（6）过点 J 作 FH、GH 的平行线，交 AB 于 K 点，交 BC 于 L 点，则 $\triangle JKL$ 为 $\triangle ABC$ 的最小内接正三角形。

解法二：

作法：

（1）作出 $\triangle ABC$ 两个较大角的角平分线 AD、CE，如图 3-1-5 所示。

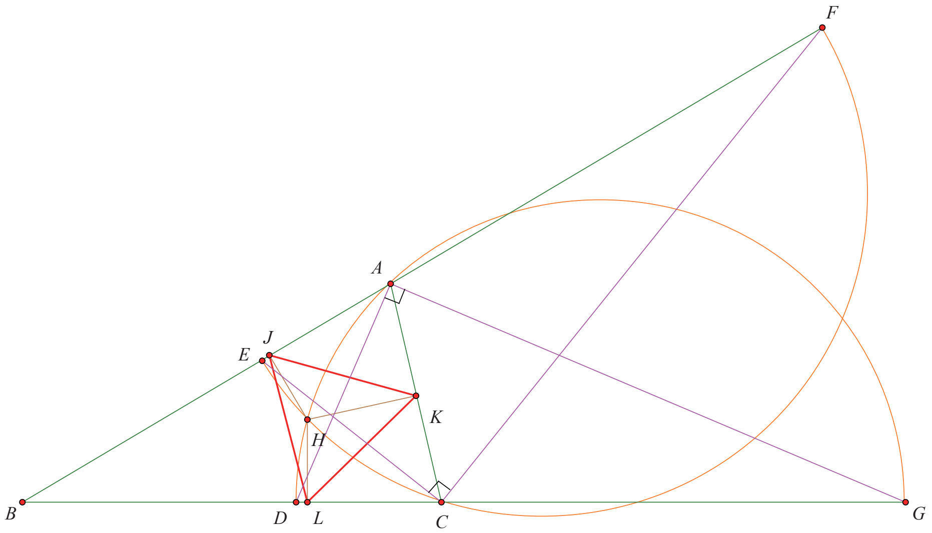


图 3-1-5

（2）过 C 点作 CE 的垂线，交 AB 于点 F；过 A 点作 AD 的垂线，交 BC 于点 G。

（3）以 EF、DG 为直径的两个圆的交点为 H。

（4）过点 H 分别作 AB、BC、AC 的垂线，垂足分别为 J、L、K，则 $\triangle JKL$ 为 $\triangle ABC$ 的内接最小正三角形。

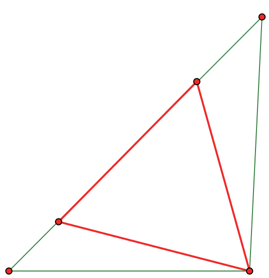
4．作三角形的最大内接正三角形

作法：

三角形内接最大正三角形的一边在原三角形最大边上，

（1）如果原三角形第二大的角 $\leq 60°$，则内接最大正三角形的其中一个顶点在原三角形最大角的顶点上，如图 3-1-6（a）所示。

（2）如果原三角形第二大的角 $> 60°$，则内接最大正三角形的其中一个顶点在原三角形第二大角的顶点上，如图 3-1-6（b）所示。


（a）

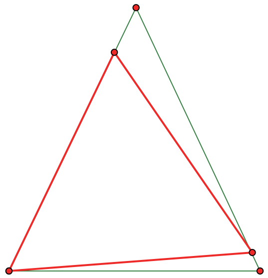

（b）

图 3-1-6

5．已知三个同心圆，作正三角形，使得正三角形三个顶点分别在三个圆上

作法：

（1）任取一点 A，以 AO 为边作正三角形 ABO，如图 3-1-7 所示。

（2）以 A 点为圆心，最小圆半径为半径作圆，交第二小圆于 C、D 两点。

（3）分别以 BD、BC 为边作正三角形，为两个解。

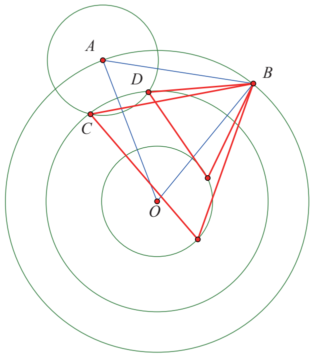


图 3-1-7

第二节
正方形问题

1．求作已知三角形的最大内接正方形

作法：（利用位似变换作图法作图）

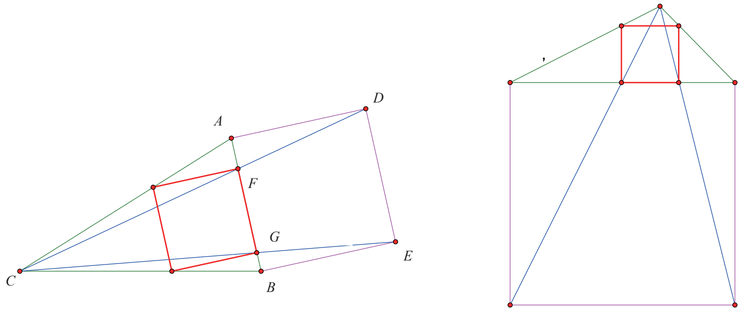
（1）直角和锐角三角形的内接最大正方形，其一边落在三角形最小边上，如图 3-2-1（a）所示。

① 取△ABC 最短边 AB 作正方形 $ABED$。

② 连结 DC，交 AB 于 F 点；连结 EC，交 AB 于 G 点。

③ 以 FG 为边长作正方形，该正方形为所作三角形内接最大正方形。

2．钝角三角形内接最大正方形，其一边落在三角形最大边上，如图 3-2-1（b）所示，具体作图过程参照（1）。



（a）　　（b）

图 3-2-1

2．求作半圆内接最大正方形

已知半圆⊙O，圆心为 O，直径为 AB，尺规作图求作半圆的内接最大正方形。

作法：

（1）以 AB 为边长，作出正方形 $ABCD$，如图 3-2-2 所示。

（2）连结 DO、CO，交⊙O 于 E、F 两点。

（3）分别过点 E、F 点作 AB 的垂线，交 AB 于 H、G 两点。则 $EFGH$ 为半圆内接最大正方形。

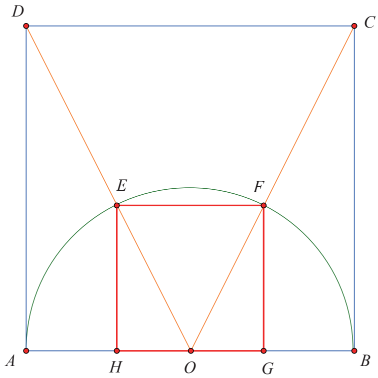


图 3-2-2

3．已知两个同心圆，求作正方形，使得正方形顶点分别在两个圆上

这个问题作图比较麻烦，需要先解决阿波罗尼斯圆作图问题，即作出到两定点距离之比等于定值的点的轨迹，当定值不等于 1 时，轨迹是两个圆，然后利用位似变换法完成作图。

1）阿波罗尼斯圆：求作到两个定点的距离的比值等于定值的点的轨迹

已知点 A、点 B，线段 CD、DE，求作到 A、B 两点的距离的比值恒等于 CD:DE 的点的轨迹。

定理：到两顶点的距离之比等于定值（定值≠1）的点的轨迹是两个圆，这两个圆称作阿波罗尼斯圆。

作法：

（1）过 A 点任作一直线，并在直线上截取 AF=CE，如图 3-2-3 所示。

（2）在 AF 上截取 $AG=CD$。

（3）连结 BF，并过 G 点作 BF 的平行线，交 AB 于点 H。

（4）以 G 点为圆心，GF 为半径作圆，交 AF 于点 J；以 A 点为圆心，DE 为半径作圆，交 AB 延长线于点 K。

（5）以 K、J、B 三点作一圆，交 AF 延长线于点 L。

（6）以 B 点为圆心，AL 为半径作弧，交 AB 延长线于点 M，则以 HM 为直径的圆为所求轨迹。

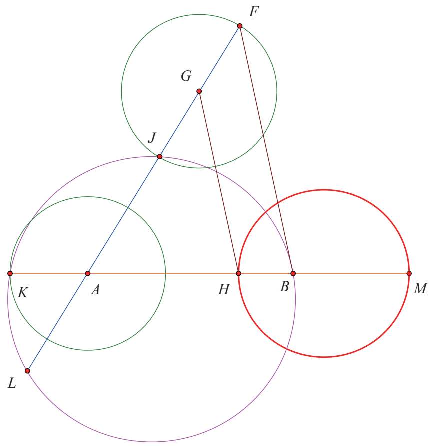


图 3-2-3

2）已知两个同心圆，求作正方形，使得正方形顶点分别在两个圆上

已知两个同心圆，大圆半径为 R，小圆半径为 r 求作一正方形，要求正方形顶点分别在两个圆周上。

作法：（利用位似变换原理）

（1）任作一个中轴线过 O 点的正方形 $ABCD$，如图 3-2-4 所示。

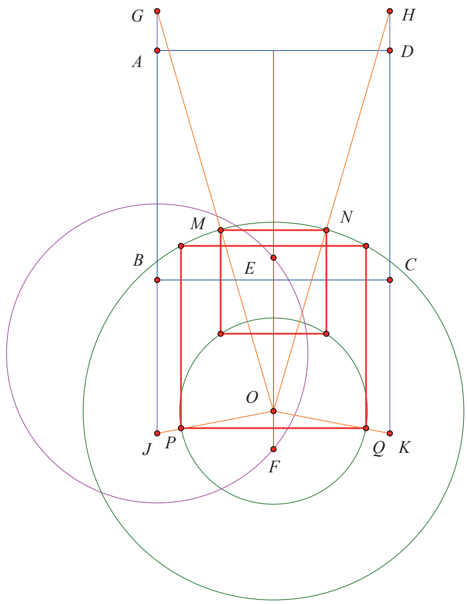


图 3-2-4

（2）作出到 A、B 两点的距离的比值恒等于 R/r 的轨迹，这个轨迹是一个圆，即阿波罗尼斯圆，交正方形中轴线于 E、F 两点。

（3）截取 $AG=HD=OF$；截取 $BJ=CK=EO$。

（4）连结 GO、HO，交大圆于 M、N 两点；连结 JO、KO，交小圆于 P、Q 两点，则以 MN 为边长的正方形为一个解；以 PQ 为边长的正方形为另一个解。

第三节 等分问题

1．已知三角形，求作一点，该点与三角形三个顶点的连线将三角形面积三等分

已知△ABC，求作一点 M，使得 MA、MB、MC 三条线段将△ABC 的面积三等分。

作法：

（1）作出 AB、AC、BC 的中点 D、E、F，如图 3-3-1 所示。

（2）连结 BE、CD、AF，三条线共点，交点为 M，则 AM、BM、CM 将△ABC 分为相等的三部分，M 点为所求的点。

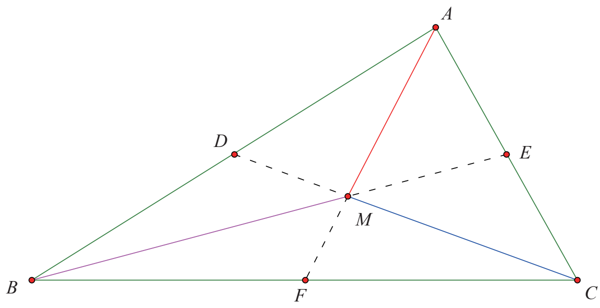


图 3-3-1

2．已知三角形、三角形内一点 P 和三角形边上一点 Q，求作另外两边上的两点，使得点 P 与三边上三点连线将三角形面积三等分

已知△ABC，Q 为 BC 上一点，P 为△ABC 内一点，求在 AB、AC 上各作一点，使得 P 点与这两点的连线以及 PQ 三根线段将△ABC 的面积三等分。

作法：

（1）连结 PB、PC，过 A 点作 AD 平行于 BP；AE 平行于 PC，如图 3-3-2 所示。

（2）作点 F，使得 $QF=DE$。

（3）作 G 点，使得 G 为 QF 的三等分点。

（4）作 H 点，使得 $HQ=QG$（D、H、B、Q、C、G、E、F 共线）。

（5）$HJ/\!/AD$，交 AB 于点 J；$GK/\!/AE$，交 AC 于点 K，则 PJ、PK、PQ 将△ABC 的面积三等分。

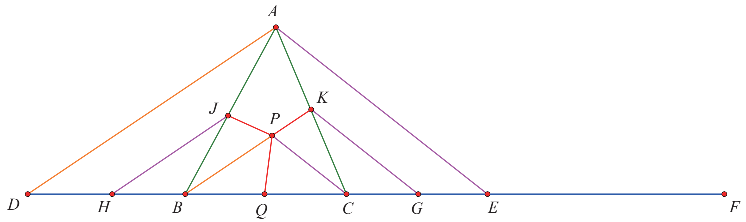


图 3-3-2

第四节 多边形的分割与拼合

这里主要研究一个多边形分割成有限块后重新组合成另一个多边形的问题。

华勒斯·波埃伊·格维也纳定理（Wallace-Bolyai-Gerwien theorem）：如果两个简单多边形面积相等，那么其中一个能分割成有限多块多边形，经过平移和旋转，拼合成另一个多边形。

华勒斯·波埃伊·格维也纳定理和塔斯基分割圆问题不同，此证明不但无必要使用选择公理，而且可以真实进行。如果将问题中的多边形换成多面体，即为希尔伯特第三问题，答案是否定的。

一般多边形分割后拼成另一个一般多边形，切割很复杂，难度比较大，本节只介绍一些正多边形的互相分割与拼合。

1．分割正三角形拼成正方形

解法一：亨利·杜德尼（Henry Ernest Dudeney，1857-1930），英国 19 世纪末 20 世纪初最伟大与知名的趣题设计家与娱乐数学家，所设计与发表的趣题涉及代数、几何、逻辑等多个数学领域，尤其在几何分割问题上取得了不寻常的成功。他最著名的几何学发现是将一个正三角形分割成四块并拼成一个正方形的方法。如图 3-4-1 所示就是他的分割法。

作法：（杜德尼解法）

（1）如图 3-4-1 所示，点 D、E 分别为 AB、AC 的中点。

（2）F 点在 BE 延长线上，并且 $AE=EF$。

（3）以 BF 为直径作圆，交 AC 延长线于 G 点，则 GE 等于正方形边长。

（4）以 E 为圆心，EG 为半径作弧，交 BC 于点 H。

（5）作 $HJ=JL=AD$，$EK=DE$。将正三角形分割成五块，可拼成一个正方形。

这个分割还有个奇妙之处，如果将所有块用铰链链接成一串，从一个方向卷会得到正三角形，从反方向卷则得到正方形。

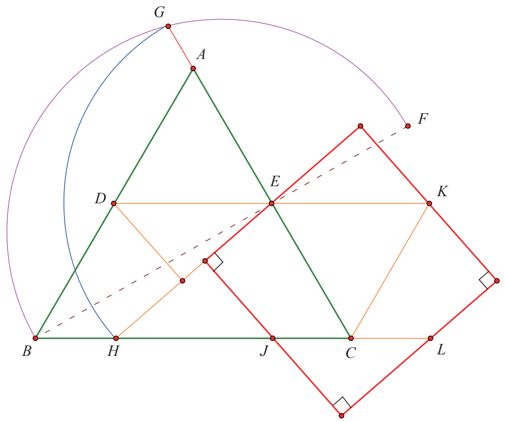


图 3-4-1

解法二：1956 年，美国人给出了另一个解法。

（1）作 BC 的中点 D，连结 AD，如图 3-4-2 所示。

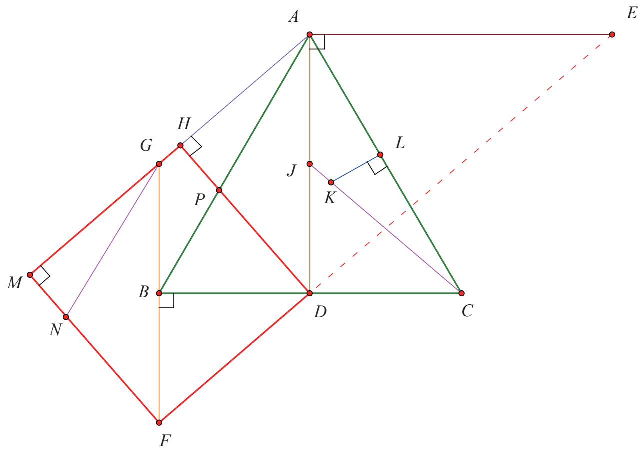


图 3-4-2

（2）过 A 点作 AD 的垂线，并截取 $AE=AC$。

（3）作直线 DE。

（4）过 B 点作 BC 的垂线，交 DE 于点 F。

（5）过 A 点作 FD 的平行线，交 BF 于点 G。

（6）过 D 点作 AG 的垂线，交 AG 于点 H。

（7）以 C 点为圆心，FD 为半径作弧，交 AD 于点 J。

（8）截取 $JK=GH$。

（9）过 K 点作 AC 的垂线，垂足为 L。

（10）过 F 点作 AG 的垂线，垂足为 M。

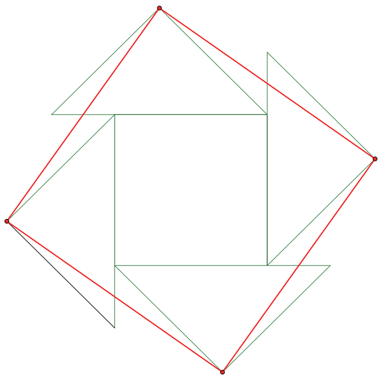


图 3-4-3

（11）截取 $NM=KL$。

（12）连结 NG。

最终将正三角形分割成五块，拼成正方形。

2．分割三个正方形，拼成一个正方形

解法一：（艾布・瓦作法）

作法：

将三个正方形中的两个沿对角线切割，然后排列成如图 3-4-3 所示的位置进行切割，总共分割成九块，拼成一个大正方形。

解法二：

作法：

如图 3-4-4 所示，将三个正方形 $ABCD$、$DCFE$、$EFHG$ 并排排列，作∠AGK=30°，与 AB 直线的交点为 K，那么 AK 就是拼成的大正方形边长。

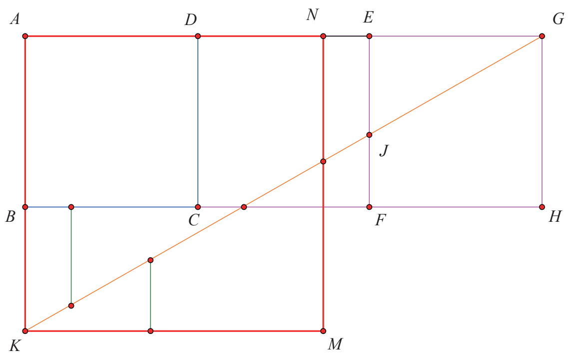


图 3-4-4

3．分割正五边形，拼成正方形

作法：杜德尼作法，最少分割法，六块。

（1）连结 BE，作出中点 F，如图 3-4-5 所示。

（2）在 AB 上截取 $BG=BF$，连结 GF。

（3）在 CD 延长线上截取 $CH=BF$。

（4）作出点 L，使得 $LHDE$ 是平行四边形。

（5）以 C 点为圆心，CH 为半径作弧，交 LH 于点 J，连结 CJ。

（6）作出平行四边形 $LHDE$ 的边 HD 和高的比例中项 XY，$XY=\sqrt{HD\cdot 高}$（这里没有画出来）。

（7）以 L 点为圆心，XY 为半径作弧，交 CD 于点 K。

（8）过 L 点作 EK 的垂线，垂足为 T，交 BC 于点 M。

（9）作出正方形 $LPQT$（P 点在 CD 延长线上）。

（10）截取 $AN=RS=BM$。

（11）连结 RS、GN。拼图时，$MCKT$ 属于重合部分。

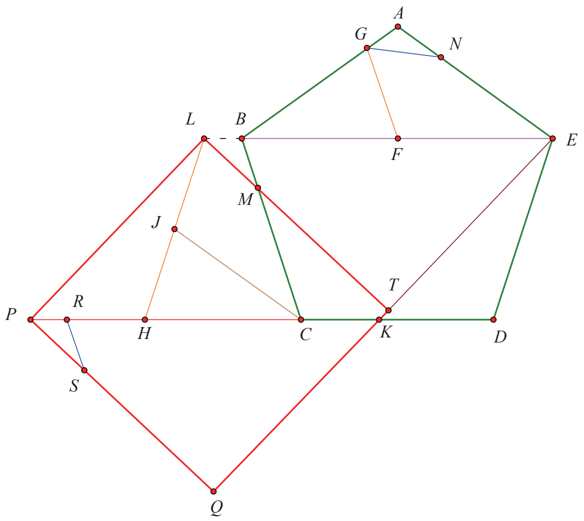


图 3-4-5

4．分割正六边形，拼成正方形

作法：

（1）已知正六边形 $ABCDEF$，作出平行四边形 $HGCD$，使得 $GF=AB$，$HE=FC$，如图 3-4-6 所示。

（2）作出平行四边形 $HGCD$ 的边 HD 与高的比例中项 XY，$XY=\sqrt{HD\cdot 高}$（这里没有作出），则 XY 为正方形边长。

（3）以 H 点为圆心，XY 为半径作弧，交 CG 于点 J。

（4）过 D 点作 HJ 的垂线，垂足为 K。

（5）作出正方形 $KDLM$。

（6）过 L 点作 CD 的平行线，交 ED 于点 N，连结 LN。

（7）以 F 点为圆心，LD 为半径作弧，交 AB 于点 P。

（8）截取 $FQ=JK$。

（9）过 Q 点作 FP 的垂线，交 FC 于点 R，连结 QR。

（10）KD 与 FC 的交点为 S，则 $FSED$ 为正方形和正六边形重叠部分。

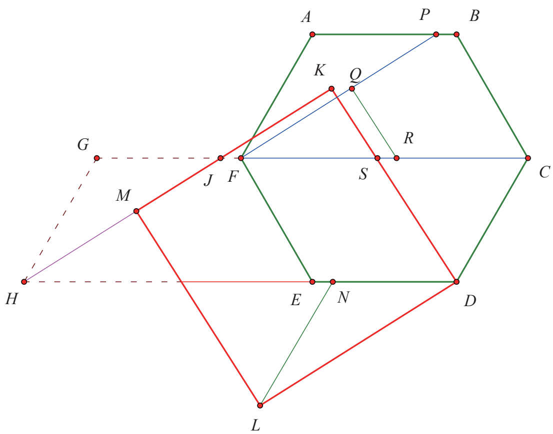


图 3-4-6

第五节 其他问题

1．求作三角形内接周长最短三角形

意大利法尼亚诺（G.F.Fagnanodei Tashi，1715—1797）提出：在锐角三角形中求作周长最短的内接三角形。德国数学家施瓦茨尔（H.A.Schwarz，1843—1921）证明：在锐角三角形中，垂足三角形周长最短。

已知$\triangle ABC$，求作$\triangle ABC$的内接周长最短三角形。

作法：

（1）过 A 点作 BC 的垂线，垂足为 F；过 C 点作 AB 的垂线，垂足为 D；过 B 点作 AC 的垂线，垂足为 E，如图 3-5-1 所示。

（2）连结 D、E、F，则$\triangle DEF$为$\triangle ABC$的周长最短内接三角形。

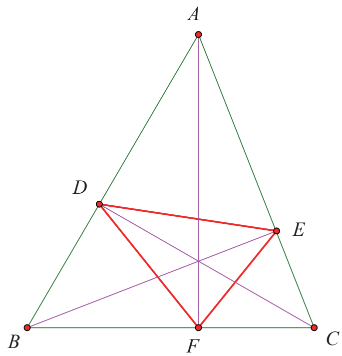


图 3-5-1

2．双圆四边形

一个多边形，如果既有外接圆又有内切圆，这个多边形就叫做双圆多边形。很明显，任何三角形都是双圆三角形，但四边形就不一定同时有外接圆和内切圆。符合双圆四边形的充分必要条件是（记四边形外接圆的半径长为 R，内切圆半径长为 r，两圆圆心距离为 d）：$2r^2\left(R^2+d^2\right)=\left(R^2-d^2\right)^2$，这个关系式是瑞士数学家富斯（N.Fuss，1755—1826）发现的，叫作 Fuss 定理。

问题：已知一个圆及圆上的三点，求作圆上第四点，使得这四点构成双圆四边形的四个顶点。

已知⊙O，A、B、C 三点在⊙O 上，求在⊙O 上作一点，使得它与 A、B、C 三点构成双圆四边形顶点。

作法：

（1）连结 AC，作出 AC 的中点 D。如图 3-5-2 所示

（2）作射线 DO，交⊙O 于点 E。

（3）连结 AB。

（4）以 B 点为圆心，BC 为半径作弧，交 AB 于点 F。

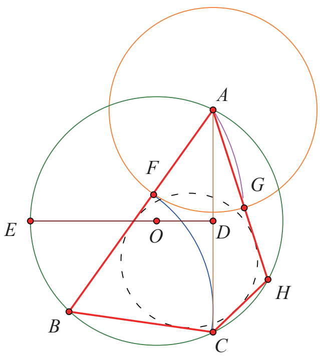


图 3-5-2

（5）以 A 点为圆心，AF 为半径作圆。

（6）以 E 点为圆心，EA 为半径作弧，交⊙A 于点 G。

（7）作射线 AG，交⊙O 于点 H，则四边形 $ABCH$ 为双圆四边形，H 点为所作的点。

3．太极阴阳图

“太极阴阳图”又称“太极两仪图”或“两仪图”，由阴阳双鱼组成，代表了阴阳、动静等两极矛盾的对立与统一，体现了我国先哲朴素的哲学思想。“太极阴阳图”与“太极图”不同，“太极”由“无极”而来，是阴阳两分之前的混沌状态，所以“太极图”只是一个圆。不过现在很多人都将“太极阴阳图”误称作“太极图”，本文为了简述，也将就这个“简称”。世界很多文化都有类似太极图的图形，我国的据说是宋朝道士陈抟所作，周敦颐写了《太极图说》并加以解释，现在我们看到的太极图，就是周敦颐所传的。

太极图最外围是一个圆，分割线是两个半圆，中间是两个小圆，图形简洁优美。有人将太极图看作拓扑学里的莫比乌斯带或克莱因瓶在二维平面的投影，确实很像。韩国很崇尚我国的儒家及道家思想，自 1883 年就开始使用太极旗（见图 3-5-3）直到现在。

太极图里面的两个小圆，画大了显得拥挤，画小了显得不起眼，两个小圆应该多大才合适?

如果从美感来设计，两个小圆的半径应该不是大圆半径的整数比，因为人眼欣赏美的比例遵循黄金分割比例，即小圆的直径应该等于中间半圆半径的 0.618033…。简化绘图可以取整数比，即小圆半径等于中间半圆半径的 1/3，也算美观。但这样作图正确吗?笔者认为不能从美观来绘制太极图，太极图既然是哲学思想的产物，就应该从太极图的哲学思想来绘制。根据《易传・系辞上传》里的一句话：“易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦。”可以看出“1 到 2，2 到 4，4 到 8，……”这种几何级数思想，这和自然界里的很多现象非常吻合，如核裂变、核聚变等。太极图作为大自然哲学思想的具体图形，应该遵从其哲学思想而不是美观，所以太极图里面的圆弧的半径也应该体现这种级数关系，即两个小圆的半径应该等于中间半圆半径的 1/4，等于大圆半径的 1/8。

太极图绘图没什么数学上的对与错，在这里是个题外话，笔者的观点仅供参考，如图 3-5-4 所示就是按级数倍数作出的太极八卦图。

图 3-5-3　韩国国旗

图 3-5-4　太极八卦图

第四章 正多边形尺规作图

本章主要介绍正多边形的尺规作图法。正多边形外观优美，人们很早就开始研究正多边形的尺规作图问题。一般随着边数增多，作图难度也会增大，其中蕴含很深的数学原理，是尺规作图的一个重要课题。历史上许多大数学家都有过深入研究，并得到许多重要成果，其中德国数学家高斯对正多边形作图的贡献最大，漂亮解决了正多边形可作图判定法则及一般作图方法原理，使正多边形作图这座“大厦”几乎完工，这是尺规作图领域的一个里程碑。

第一节

基础知识

1．简单多边形与正多边形定义

简单多边形是指各边都不相交的多边形。

正多边形是指所有边都相等并且所有角都相等的简单多边形。

2．费马数与费马素数

形如 $2^{2^n}+1\ (n\in\mathbf{N})$ 的自然数叫做费马数，记作 F_n，它是由业余数学家皮埃尔·德·费马（Pierre de Fermat，1601—1665）首先提出并研究的，如图 4-1-1 所示为费马画像。

当 F_n 是素数时，F_n 也叫费马素数。

费马曾猜想：所有费马数都是素数。后来人们发现费马的猜想错了，有的费马数是素数，有的则是合数，到目前为止人们发现的费马素数只有五个：

$F_1=3$，$F_2=5$，$F_3=17$，$F_4=257$，$F_5=65537$。

3．正多边形可作图判定定理（Gauss-Wantzel 定理）

当且仅当正多边形的边数是 $2^n F_aF_bF_cF_d\cdots$（F_a、F_b、F_c、$F_d\cdots$是相异的费马素数，$n\in\mathbf{N}$）时，正多边形可以由尺规作图作出。也就是只有当正多边形的边数是 2^n 或 2^n 与若干个不同的费马素数的乘积时，该正多边形才可以由尺规作图作出，尺规作图也只能作出这样的正多边形。

1796 年 19 岁的高斯（Gauss，1777—1855，德国人）证明了正多边形尺规可作图判定的充分性，如图 4-1-2 所示为高斯画像。1837 年法国 P.L.Wantzel 证明了正多边形尺规可作图判定的必要性。

根据可作图判定定理，7 是素数，但不是费马素数，所以正七边形无法作图；

9=3×3，是费马素数的乘积，但有两个相同的费马素数因子，所以正九边形也无法作图；11 和 13 都是素数，但不是费马素数，所以正十一边形和正十三边形也无法作图；14=2×7，不是 2^n 与费马素数的乘积，所以正十四边形也无法作图。

图 4-1-1　费马

图 4-1-2　高斯

费马素数的个数有多少？是否无限？目前不得而知，人们目前只发现前五个费马数是费马素数。根据可作图判定，那么人类目前可以作出的奇数边正多边形的数量是有限的，边数最小是 3，边数最大是 $3\times5\times17\times257\times65537=4294967295=2^{32}-1$。这个正四十多亿边形边数多得吓人，但不必费力去研究它的作图，只要解决了正 3、5、17、257、65537 边形作图，就可以解决它们的乘积边数的所有正多边形作图。因为 n 个相异费马素数乘积边数的正多边形作图，可以由这 n 个费马素数正多边形作图的叠加来完成。例如，正十五边形，因为 15=3×5，所以正十五边形作图可以由正三边形和正五边形作图的叠加来实现。所以正 3、4、5、17、257、65537 边形作图是基础与核心，掌握了这六个基本作图，就可以作出目前人类所知所有可作图的正多边形的作图。

本书重点介绍正 3、4、5、17 边形作图。边数为 17 以内可作图的其他边数正多边形是：正 6、8、10、12、15、16 边形，这些正多边形作图仅举一些例子供大家参考。至于正 257 边形、正 65537 边形，作图太过复杂艰难，估计也没多少人有耐心看，在这里就不介绍了，有兴趣者可参阅相关资料。

第二节
正多边形尺规作图历史

公元前三世纪，欧几里得在《几何原本》里已记载了正方形、正五边形、正六边形作法，后来人们也掌握了正十五边形作图，之后两千多年时间，人们都没有新发现。

1796 年，19 岁的高斯证明了正 17 边形可以用尺规作图作出，但具体作法高斯从来没有发表，也许他认为相对于他的证明，具体作图显得微不足道。1825 年 Johannes Erchinger 发表了第一个正十七边形尺规作图法。1898 年，高斯的孙子在高斯的遗物中发现了一本笔记本，1796 年 3 月 30 日高斯在日记中写道：“圆的分割定律，如何以几何方法将圆分成十七等份”，虽未见具体图形，但可以推断，高斯至少在草稿纸上完成了作图过程分析，他也会正十七边形尺规作图。

1832 年，里奇罗特（Friedrich Julius Richelot）发表了正 257 边形尺规作图法，手稿长达 80 余页。

高斯的二次同余论证明了正 65537 边形能够尺规作图，但谁都知道真正去实现一难题的作图，对身心是多么大的摧残。可德国数学家 Johann Gustav Hermes 就是不怕死，这位苦行僧花了十年心血，于 1894 年发表了正 65537 边形尺规作图法，手稿 200 多页，装满了一个箱子，保存在德国哥廷根大学，这是目前人类最复杂的尺规作图（由于作图太过复杂，有数学家对其作图的正确性表示怀疑）。由于边数巨大，使得人们无法用任何办法将其完整地印刷或显示出来，并与圆周加以区分。如果真画出 65537 边形及其外接圆，并使边与圆周的最大距离为 1 毫米的话，那么这个圆的半径将超过 870 公里！这差不多是北京到南京的直线距离，开车画一条半径就得跑半天。至此，人类尺规作图作正多边形的历史到此结束。

费马数的增大以爆炸式膨胀，第 12 个费马数已是超过 400 位的天文数字了！从 F_5 到 F_{32}，人类或者用计算机，或者用数学证明，发现没有一个是素数。F_{32} 等于 2 的 4294967296 次方！这个数已是硕大无比，如果真存在第六个费马素数，这个数有多大，大家可以展开想象力想象一下！

正 65537 边形尺规作图，J.G.Hermes 就花了 10 年，如果真存在第六个费马素数，恐怕再没有人去研究它具体如何作图了。这么浩大的工程，不单是人类办不到，即使不是人的外星人也办不到！只有交给计算机才可能完成。

表 4-2-1 所示为可作图圆内接正多边形边长及面积表达式一览表。

表 4-2-1　可作图圆内接正多边形边长及面积表达式一览表

序号	边数	圆心角	边长	面积
1	3	120°	$r\sqrt{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$
2	4	90°	$r\sqrt{2}$	$2r^2$
3	5	72°	$r\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$	$\frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}r^2$
4	6	60°	r	$\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$
5	8	45°	$r\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$2\sqrt{2}r^2$
6	10	36°	$r\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\frac{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}r^2$
7	12	30°	$r\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$3r^2$
8	15	24°	$r\frac{\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}{2}$	$\frac{15\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}}}{8}r^2$
9	16	22.5°	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$4\sqrt{2-\sqrt{2}}r^2$
11	倍边公式		$S_{2n}=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-S_n^2}}$	

正十七边形的边长表达式比较复杂，角度 π/17 的正弦函数精确表达式为：

$$\sin\frac{\pi}{17}=\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}}{8}。$$

作图时也可以采取作余弦的方式作正十七边形，余弦表达式为：

$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}。$$

上面都是可作图正多边形的边长及面积的表达式，表达式只有加、减、乘、除及开平方运算，尺规作图都是可以完成的。

下面是用欧拉公式，借助复数给出的一些不可作图角度的表达式（为了不至混淆，虚数 i 写在数字前面）。

用于正七边形：

$$\sin\frac{2\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{6}+\frac{\left(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{-52\sqrt{7}+\mathrm{i}12\sqrt{21}}+\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{-52\sqrt{7}-\mathrm{i}12\sqrt{21}}}{24},$$

$$\cos\frac{2\pi}{7}=-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt[3]{28+\mathrm{i}84\sqrt{3}}+\sqrt[3]{28-\mathrm{i}84\sqrt{3}}}{12}。$$

用于正九边形：

$$\sin\frac{\pi}{9}=\frac{-\mathrm{i}\left[(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}-(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}\right]}{2^{\frac{7}{3}}},$$

$$\cos\frac{\pi}{9}=\frac{\sqrt[3]{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}+\sqrt[3]{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}}{2^{\frac{4}{3}}}。$$

第三节
正多边形尺规作图

1．正三角形

尺规作图作出正三角形。

作法：

（1）作出任意线段 AB，如图 4-3-1 所示。

（2）分别以 A、B 为圆心，AB 长为半径作弧，交点为 C。

（3）连结 AC、BC，则△ABC 为等边三角形。

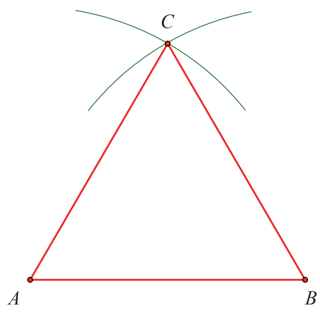


图 4-3-1

2．正方形

尺规作图作出正方形。

解法一：

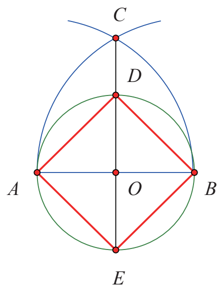


图 4-3-2

作法：（常规作法）

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-2 所示。

（2）作出直径 AB。

（3）分别以 A、B 为圆心，AB 长为半径作弧，交点为 C。

（4）作直线 CO，交⊙O 于 D、E 两点。

（5）顺次连结 D、A、E、B，作出正方形。

解法二：

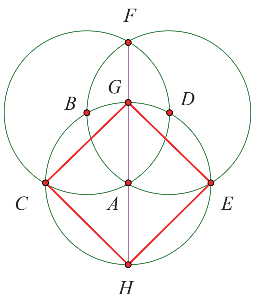


图 4-3-3

作法：（最简作法）

（1）任取一点 A 为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-3 所示。

（2）在⊙A 上任取一点 B 为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于 C、D 两点。

（3）以点 D 为圆心，AD 为半径作圆，交⊙A 于点 E，交⊙B 于点 F。

（4）作直线 AF，交⊙A 于 G、H 两点。

（5）顺次连结 G、C、H、E，作出正方形。

解法三：

作法：

（1）作任意线段 AB，如图 4-3-4 所示。

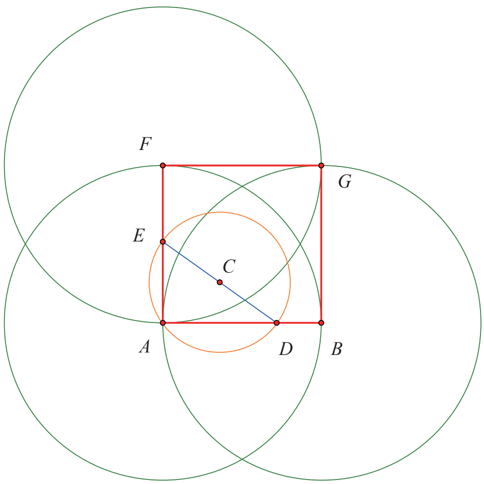


图 4-3-4

（2）在 AB 直线外任取一点 C，以 C 点为圆心，CA 为半径作圆，交 AB 于点 D。

（3）作直线 CD，交⊙C 于点 E。

（4）作直线 AE。
（5）以点 A 为圆心，AB 为半径作圆，交 AE 于点 F。
（6）以点 B 为圆心，AB 为半径作圆。
（7）以点 F 为圆心，AF 为半径作圆，交⊙B 于点 G。
（8）顺次连结 F、A、B、G，作出正方形。
解法四：
作法：
（1）任取一点 A 为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-5 所示。

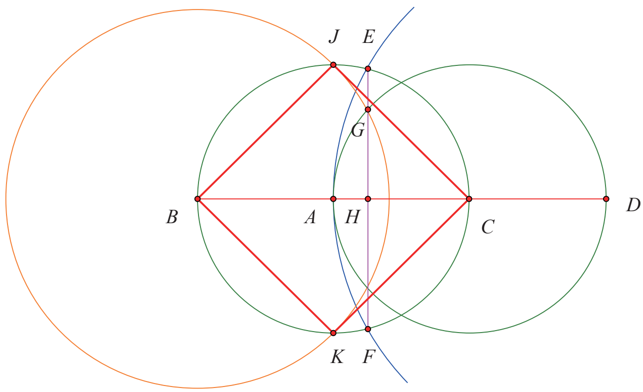


图 4-3-5

（2）作出直径 BC。
（3）以点 C 为圆心，AC 为半径作圆，交 BC 于点 D。
（4）以点 D 为圆心，AD 为半径作弧，交⊙A 于 E、F 两点。
（5）连结 EF，交⊙C 于点 G。
（6）以点 B 为圆心，BG 为半径作圆，交⊙A 于 J、K 两点。
（7）顺次连结 J、B、K、C，作出正方形。
注：这种正方形作法看似繁琐，但因为不仅有垂直，而且有 $AC=4AH$，用在正十七边形作图中可以使作图中得到很大简化。

3．黄金分割

黄金分割定义：线段 AB 上有一点 E，若 $\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{AE}{AB}$，则点 E 就叫做线段 AB 的黄金分割点。

建立方程组：$\begin{cases} AE+BE=AB \\ AE^2=BE\cdot AB \end{cases}$，解得 $AE=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}AB$。

黄金分割值一般取正值，令 $AB=1$，那么黄金分割数 $\varphi=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618033988\cdots$

黄金分割不仅在美学设计、优选法等领域有重要作用，与正五边形的关系也

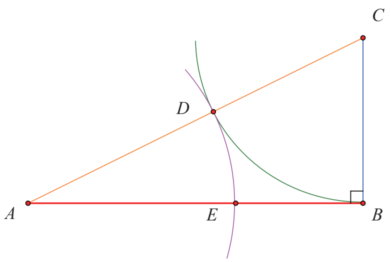


图 4-3-6

极为密切。正五边形里充满了黄金分割比例，掌握了黄金分割，就掌握了正五边形作图精髓。

尺规作图作出线段 AB 的黄金分割点。

作法：

（1）过 B 点作 AB 的垂线 BC，并截取 $BC=\dfrac{AB}{2}$，如图 4-3-6 所示。

（2）连结 AC。

（3）以点 C 为圆心，BC 为半径作弧，交 AC 于点 D。

（4）以点 A 为圆心，AD 长为半径作弧，交 AB 于点 E，则 E 为 AB 的黄金分割点。

4．正五边形

尺规作图作出正五边形。

解法一：（经典作法）

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-7 所示。

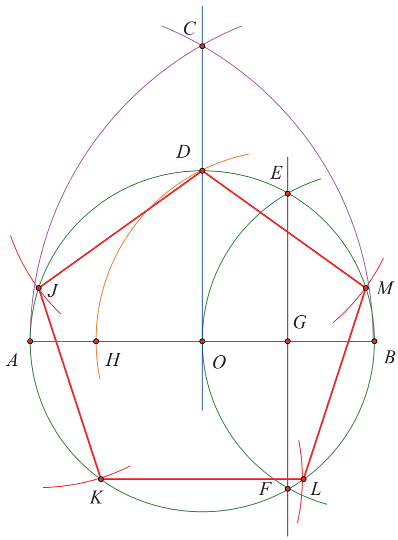


图 4-3-7

（2）作出直径 AB。

（3）分别以点 A、B 为圆心，AB 长为半径作弧，交点为 C。

（4）作直线 CO，交⊙O 于点 D。

（5）以点 B 为圆心，BO 为半径作弧，交⊙O 于 E、F 两点。

（6）作直线 EF，与 AB 交于 G 点。

（7）以点 G 为圆心，GD 为半径作弧，交 AB 于 H 点，则 DH 为正五边形边长。

（8）从点 D 开始，以 DH 长为半径，在⊙O 上顺次截取 J、K、L、M 四个点。

（9）顺次连结点 D、J、K、L、M，则五边形 $DJKLM$ 为所作正五边形。

解法二：（经典作法的一种变形）

原理：$CF=\sqrt{2}\,AO$

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-8 所示。

（2）作出直径 AB。

（3）以点 B 为圆心，BO 长为半径作弧，交⊙O 于 C 点。

（4）分别以 A、B 为圆心，以 AC 长为半径作弧，交点为 D。

（5）连结 DO，交⊙O 于点 E。

（6）以点 C 为圆心，DO 长为半径作弧，交 AB 于点 F。

（7）以点 E 为圆心，EF 长为半径，从 E 开始在⊙O 上顺次截取 G、H、I、J 四点。

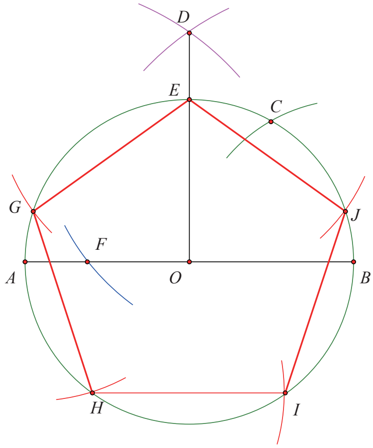


图 4-3-8

（8）顺次连结点 E、G、H、I、J，则 $EGHIJ$ 为所作正五边形。

解法三：（最简作法）

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-9 所示。

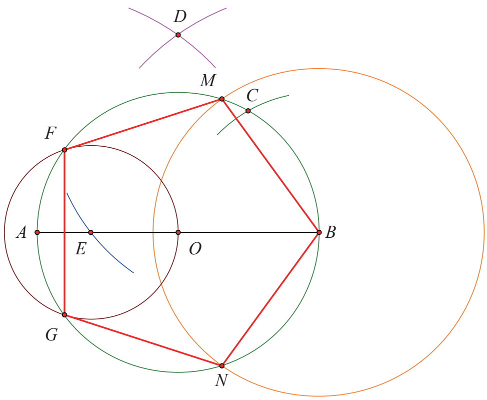


图 4-3-9

（2）作出直径 AB。

（3）以 B 点为圆心，BO 长为半径作弧，交⊙O 于点 C。

（4）分别以 A、B 点为圆心，AC 长为半径作弧，交于点 D。

（5）以点 C 为圆心，DO 长为半径作弧，交 AB 于 E 点。

（6）以点 E 为圆心，EO 长为半径作圆，交⊙O 于点 F、G。

（7）以点 B 为圆心，FG 长为半径作圆，交⊙O 于点 M、N。

（8）顺次连结 M、F、G、N、B，作出正五边形。

解法四：（最简作法）

作法：

（1）作任意直线，并在直线上作三个圆，截取五个等距点 A、B、C、D、E，如图 4-3-10 所示。

（2）分别以 A、E 为圆心，AD 长为半径作弧，交点为 F。

（3）连结 CF，与⊙C 交于点 G。

（4）以点 G 为圆心，GF 长为半径作圆，交 AE 于点 J、K。

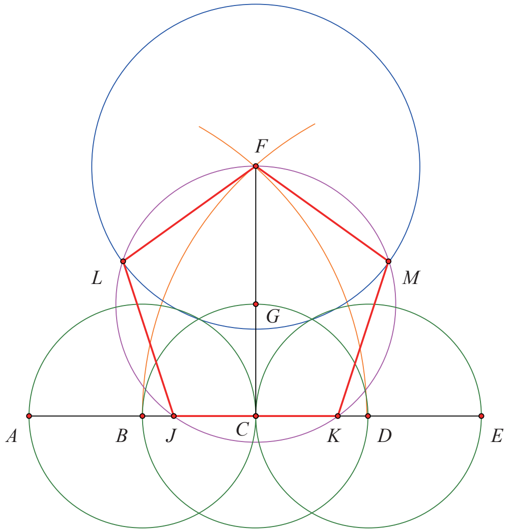


图 4-3-10

（5）以点 F 为圆心，JK 长为半径作圆，交⊙G 于点 L、M。

（6）顺次连结 F、L、J、K、M，作出正五边形。

解法五：（最简作法）

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-11 所示。

（2）在⊙O 上任取一点 A 为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于 B、C 两点。

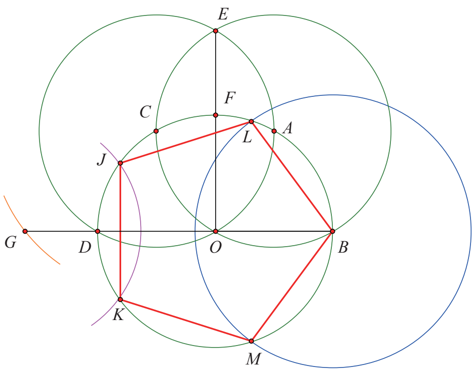


图 4-3-11

（3）以点 C 为圆心，CO 长为半径作圆，交 O 于点 D，交⊙A 于点 E。

（4）作直线 BD。

（5）连结 EO，交⊙O 于点 F。

（6）以点 C 为圆心，DF 长为半径作弧，交 BD 于点 G。

（7）以点 G 为圆心，DO 长为半径作弧，交⊙O 于点 J、K。

（8）以点 B 为圆心，JK 长为半径作圆，交⊙O 于点 L、M。

（9）顺次连结 B、L、J、K、M 作出正五边形。

解法六：最简作法

（1）作出任意线段 AB，如图 4-3-12 所示。

（2）分别以 A、B 为圆心，AB 长为半径作圆，两圆交点为 C、D。

（3）作直线 CD，交 AB 于点 E。

（4）以点 E 为圆心，AB 长为半径作圆，交 CD 于点 F。

（5）作直线 AF。

（6）以点 F 为圆心，AE 长为半径作圆，交 AF 于点 G。

（7）以点 A 为圆心，AG 长为半径作弧，交 CD 于点 H，交⊙B 于点 J。

（8）以点 H 为圆心，HJ 长为半径作弧，交⊙A 于点 K。

（9）顺次连结点 H、K、A、B、J，作出正五边形。

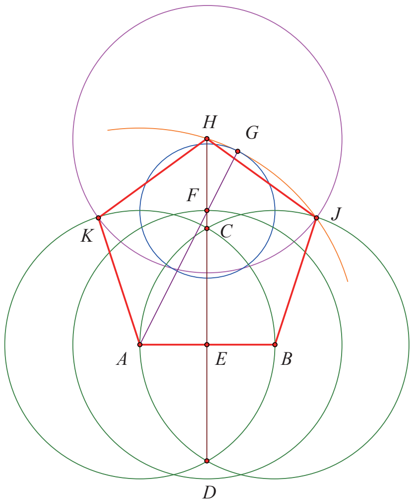


图 4-3-12

解法七：

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-13 所示。

（2）作过 O 点的直径 AB。

（3）以点 A 为圆心，AB 长为半径作圆，交直线 AB 于点 C。

（4）分别以 B、C 为圆心，BC 长为半径作弧，交点为 D。

（5）作直线 AD，与⊙A 交于点 E、F。

（6）连结 OF，与⊙O 交于点 G。

（7）以点 F 为圆心，FG 为半径作圆，交⊙A 于点 J、K。

（8）以点 E 为圆心，JK 长为半径作圆，交⊙A 于点 L、M。

（9）顺次连结 E、L、J、K、M，作出正五边形。

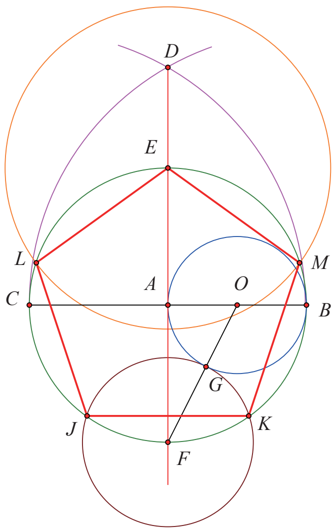


图 4-3-13

解法八：

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意半径作圆，如图 4-3-14 所示。

（2）在⊙O 上取一点 A 为圆心，AO 长为半径作

圆，与⊙O 的交点为点 B、C。

（3）以点 B 为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙O 于点 D。

（4）作直线 BC，交⊙B 于点 E、F。

（5）以点 E 为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙B 于点 G。

（6）以点 G 为圆心，GB 为半径作圆，交⊙E 于点 H。

（7）以点 H 为圆心，DE 长为半径作圆，交 BC 于点 J。

（8）以点 E 为圆心，EJ 为半径作圆，交 B 于点 L、K。

（9）以点 F 为圆心，LK 长为半径作圆，交⊙B 于点 M、N。

（10）顺次连结 F、M、L、K、N，作出正五边形。

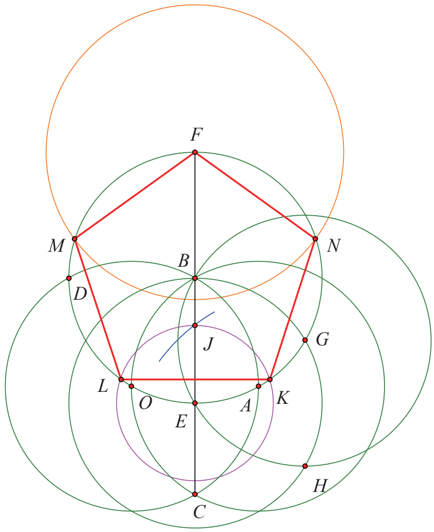


图 4-3-14

解法九：

作法：

（1）作线段 AB，如图 4-3-15 所示。

（2）作出 AB 的中点 C。

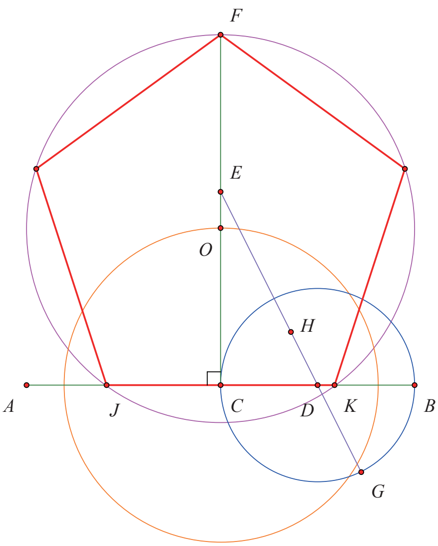


图 4-3-15

（3）作出 BC 的中点 D。

（4）过点 C 作 AB 的垂线，截取 $CE=EF=BC$。

（5）作直线 ED。

（6）以点 D 为圆心，CD 为半径作圆，交 ED 于点 G。

（7）作出 EG 的中点 H。

（8）以点 C 为圆心，EH 长为半径作圆，交 CF 于点 O。

（9）以点 O 为圆心，BC 长为半径作圆，交 AB 于点 J、K，则 JK 为⊙O 内接正五边形的边长，余下过程略。

解法十：

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-16 所示。

（2）在⊙O上任取一点A为圆心，AO长为半径作圆，与⊙O交于点B、C。

（3）以点B为圆心，AO长为半径作圆，交⊙O于点D，交⊙A于点E。

（4）连结BC，交⊙B于点F。

（5）以点F为圆心，AO长为半径作圆，交⊙B于点G、H。

（6）连结GH，交BC于点J。

（7）连结EJ。

（8）以点J为圆心，BJ长为半径作圆，交EJ于点K。

（9）以点E为圆心，EK长为半径作圆，交⊙B于点L、M。

（10）以D为圆心，LM长为半径作圆，交⊙B于点P、Q。

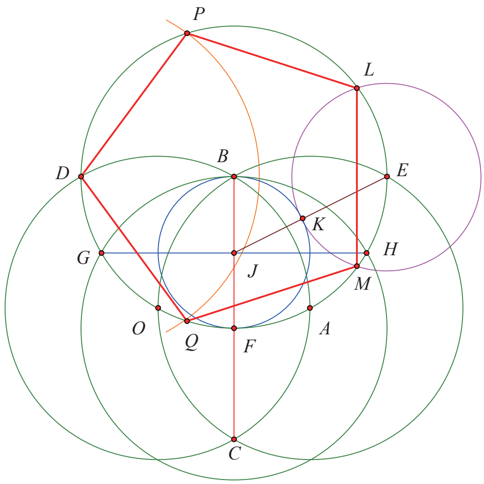


图 4-3-16

（11）顺次连结P、D、Q、M、L，作出正五边形。

解法十一：

作法：

（1）任取一点O为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-17 所示。

（2）在⊙O上任取一点A为圆心，AO长为半径作圆。

（3）作直线AO，交⊙O于点C，交⊙A于点B。

（4）分别以O、B点为圆心，OB点长为半径作弧，交点为D。

（5）连结AD，与⊙A的交点为E。

（6）以C点为圆心，CE长为半径作弧，交AO于点F。

（7）以F点为圆心，BF长为半径作圆，交AD于点G。

（8）以O点为圆心，GO长为半径作弧，交以BO长为半径的⊙B于点J。

（9）以B点为圆心，BG长为半径作弧，交以BO长为半径的⊙O于点K。

（10）顺次连结G、O、J、K、B，作出正五边形。

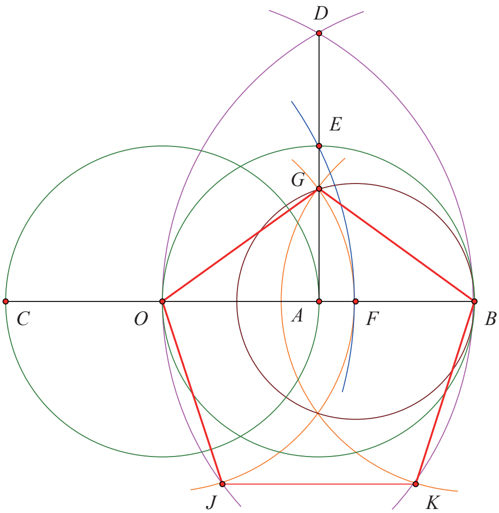


图 4-3-17

解法十二：

作法：

（1）作两垂直直径 $AB \perp DO$，如图 4-3-18 所示。

（2）作出 CO 的中点 D。

（3）以点 D 为圆心，DA 长为半径作圆，交 CO 于点 E。

（4）作出 OE 的中点 F。

（5）以 O 点为圆心，OF 长为半径作圆，交 AB 于点 G。

（6）过 G 点作 AB 的垂线，交⊙O 于点 J、K。

（7）以点 J 为圆心，JB 长为半径作弧，交⊙O 于点 L。

（8）以点 K 为圆心，BK 长为半径作弧，交⊙O 于点 M。

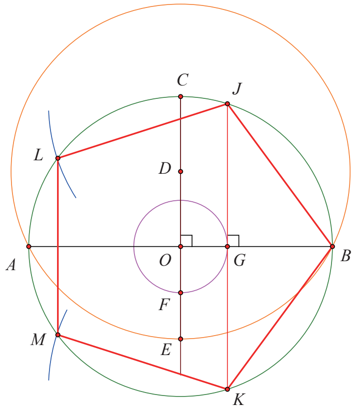


图 4-3-18

（9）顺次连结 L、M、K、B、J 作出正五边形。

解法十三：

原理：正五边形的边与其对角线长度之比是黄金比例。

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，以任意长为半径作圆，如图 4-3-19 所示。

（2）作直径 AB。

（3）分别以 A、B 为圆心，AO 长为半径作弧，交于 C 点。

（4）连结 CO，交⊙O 于点 D。

（5）以 A 点为圆心，AO 长为半径作圆。

（6）以 O 点为圆心，AD 长为半径作圆，与以 AO 长为半径的⊙A 交于点 E。

（7）连结 BE。

（8）以 E 点为圆心，AE 长为半径作弧，交 BE 于点 F。

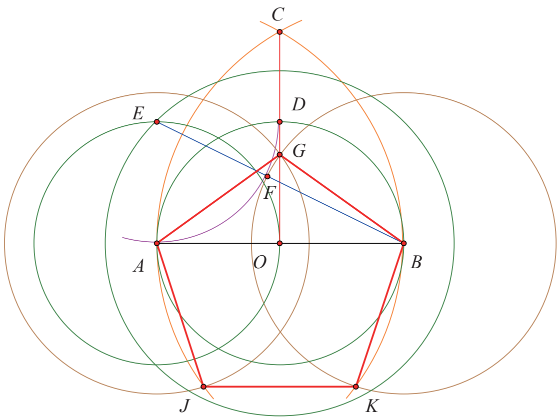


图 4-3-19

（9）以 B 点为圆心，BF 长为半径作圆，交 CO 于点 G，交以 AB 长为半径的⊙A 于点 K。

（10）以 A 点为圆心，AG 长为半径作圆，交以 AB 长为半径的⊙B 于点 J。

（11）顺次连结点 G、A、J、K、B，作出正五边形。

解法十四：

原理：假如五边形 $ABCDE$ 是正五边形，那么 F 是 AG 的黄金分割点，如图 4-3-20 所示。不过只知道这一点还无法作出正五边形，因为只知道 BE 和 CD 所在的直线，其长度并不知道。接下来，我们作出 $AF=FJ$，以 G 点为圆心，GF 长为半径作圆。以 F 点为圆心，FJ 长为半径作圆，交⊙G 于点 K。此时，直线 JK 必经过正五边形的两个顶点 C、E，于是可以作出正五边形，余下作法略。

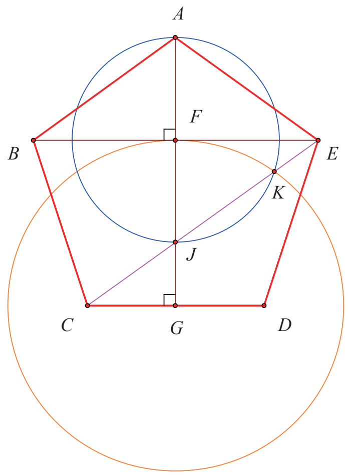


图 4-3-20

解法十五：

原理：若五边形 $ABCDE$ 是正五边形，AE 和 CD 的交点为 F，那么 D 点为 CF 的黄金分割点，并且 $BD=DF=EF$，$CF=AF$，如图 4-3-21 所示。根据这几个关系，可以很容易地作出正五边形，作法很多，具体作法略。

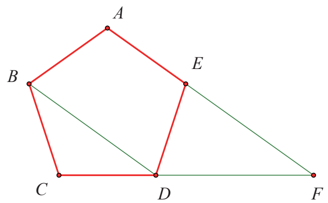


图 4-3-21

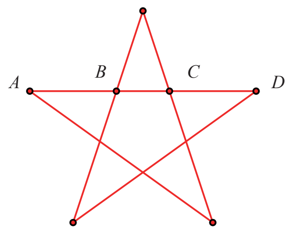


图 4-3-22

解法十六：

原理：

在如图 4-3-22 所示的五角星中，B、C 是 AD 的两个黄金分割点，根据这点可以很容易地作出正五边形，具体过程略。

解法十七：

原理：如图 4-3-23（a）所示，如果 A 点是 BO 的黄金分割点，那么正五边形有两个顶点在圆周上，两个顶点在 BO 上。

作法：

（1）作出 Rt△ABC，∠B=90°，并且 AB=2BC，如图 4-3-23（b）所示。

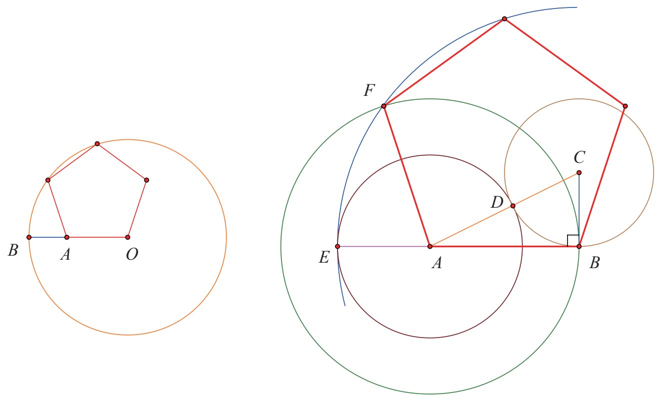
（2）以 C 点为圆心，BC 长为半径作弧，交 AC 于点 D。

（3）以 A 点为圆心，AD 长为半径作弧，交 AB 于点 E。

（4）以 B 点为圆心，BE 长为半径作圆。

（5）以 A 点为圆心，AB 长为半径作弧，交⊙B 于点 F。

此时，点 F、A、B 是正五边形的三个顶点，余下两个顶点可以作出。



（a） （b）

图 4-3-23

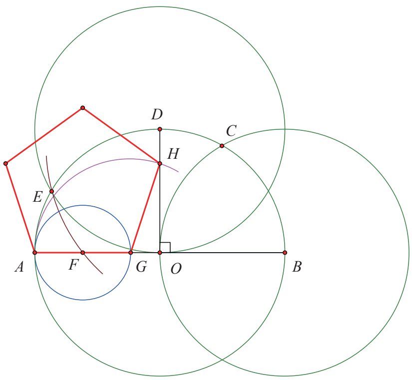


图 4-3-24

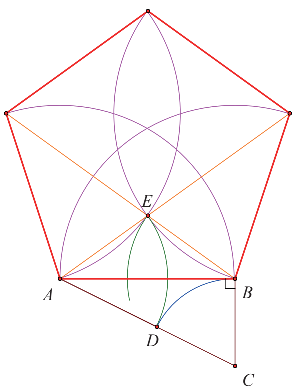


图 4-3-25

解法十八：

作法：

（1）作⊙O 的直径 AB，作 $DO \perp AB$，如图 4-3-24 所示。

（2）以 B 点为圆心，BO 为半径作弧，交⊙O 于点 C。

（3）以 D 点为圆心，DO 为半径作弧，交⊙O 于点 E。

（4）以 C 点为圆心，CE 为半径作弧，交 AB 于点 F，则 F 点为正五边形边的中点。

（5）以 F 点为圆心，AF 为半径作弧，交 AB 于点 G。

（6）以 G 点为圆心，AG 为半径作弧，交 DO 于点 H。此时，A、G、H 为正五边形的三个顶点，余下顶点很容易作出，具体作法略。

解法十九：

作法：

（1）在 Rt△ABC 中，∠ABC=90°，AB=2BC，CD=BC，如图 4-3-25 所示。

（2）分别以 A、B 为圆心，AD 长为半径作弧，交点为 E。

（3）作直线 AE、BE，则这两条直线分别经过正五边形的两个顶点，余下作图过程略。

解法二十：

原理：$CO \perp AB$，$OD=DB$，ED 是 $\angle CDO$ 的角平分线，如图 4-3-26 所示。$EF \perp CO$，则 F、C、G 是正五边形的三个顶点，余下过程略。

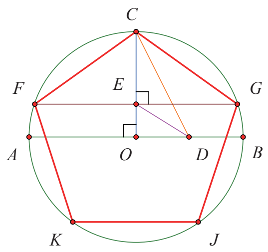


图 4-3-26

解法二十一：

原理：$BO \perp AO$，C 为 AO 的中点，如图 4-3-27 所示。作直线 BC，作 $\angle OCD$ 的角平分线，与 BO 交于点 E。作直线 $EF \perp BO$，则 GF 是圆内接正五边形的一条边，余下作法略。

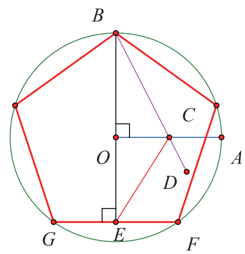


图 4-3-27

解法二十二：

原理：

（1）在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle CBA=90°$，$AB=2BC$，如图 4-3-28 所示。

（2）以 C 点为圆心，BC 为半径作圆，交 AC 于点 D、E。

（3）以 D 点为圆心，AE 为半径作弧，交 AC 于点 F。

（4）以 A 点为圆心，AF 为半径作圆，交 AC 于点 G。

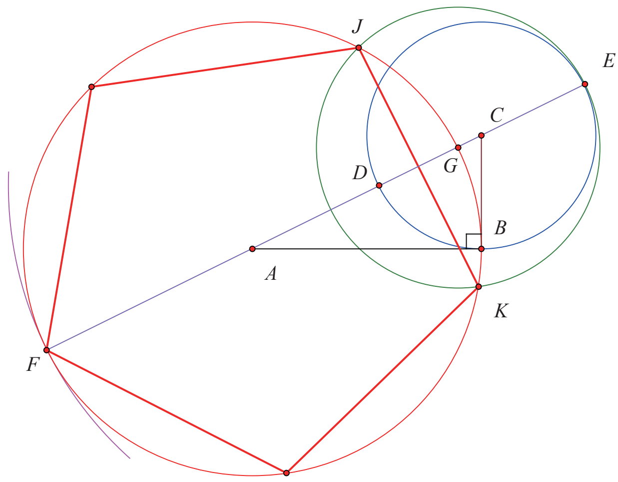


图 4-3-28

（5）以 G 点为圆心，GE 长为半径作圆，交 $\odot A$ 于 J、K 两点。

此时，点 F、J、K 为正五边形三个顶点，余下作法略。

解法二十三：

原理：

（1）在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle CBA=90°$，$AB=2BC$，如图 4-3-29 所示。

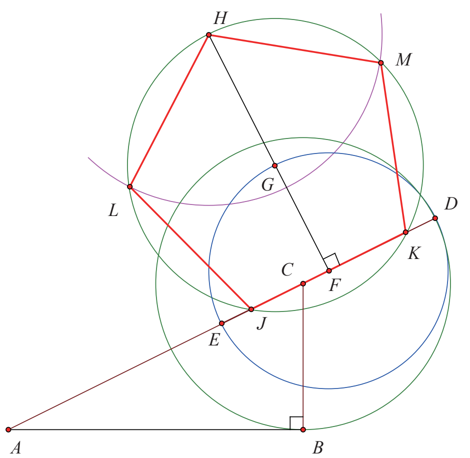


图 4-3-29

（2）以 C 点为圆心，BC 长为半径作圆，交 AC 于点 D。

（3）作出 AD 的中点 E。

（4）作出 ED 的中点 F。

（5）过 F 点作 AD 的垂线。

（6）以 F 点为圆心，EF 为半径作圆，交 AD 的垂线于点 G。

（7）以 G 点为圆心，BC 长为半径作圆，交 GF 于点 H，交 AD 于点 J、K。

（8）以 H 点为圆心，JK 长为半径作弧，交⊙G 于点 L、M。

（9）顺次连结点 H、L、J、K、M，作出正五边形。

解法二十四：

作法：

（1）作任意圆 O，直径为 AB，如图 4-3-30 所示。

（2）以 B 点为圆心，OB 长为半径作圆。

（3）作出 OB 的中点 C。

（4）作 $OD \perp AB$。

（5）分别以点 A、C 为圆心，AC 长为半径作弧，交点为 E。

（6）作 $EF \perp AB$。

（7）以 F 点为圆心，AF 长为半径作圆。

（8）以 C 点为圆心，CD 长为半径作圆，交⊙F 于点 G，交⊙B 于点 H。

（9）分别以点 G、H 为圆心，EF 长为半径作弧，交点为 J。

（10）作直线 CJ，与 OD 交于点 K。

（11）以 K 点为圆心，KH 长为半径作圆，交⊙O 于 L、M 两点。

（12）L、D、M 为正五边形三个顶点，余下作法略。

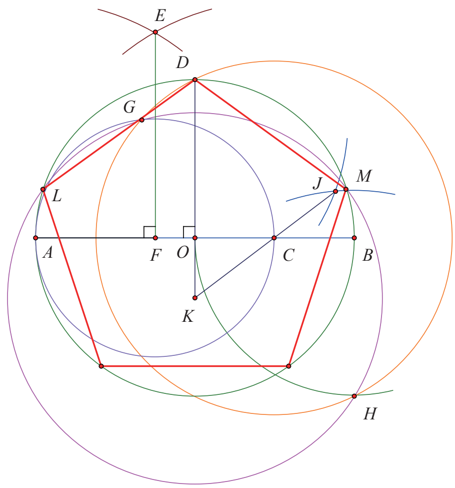


图 4-3-30

5．正六边形

尺规作图作出正六边形。

解法一：

作法：

（1）任取一点 A 为圆心，以任意长

为半径作圆，如图 4-3-31 所示。

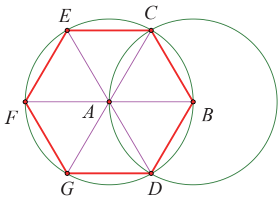


图 4-3-31

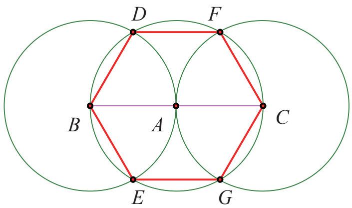


图 4-3-32

（2）在⊙*A* 上任取一点 *B* 为圆心，*AB* 长为半径作圆，交⊙*A* 于点 *C*、*D*。

（3）作直线 *BA*、*DA*、*CA*，交⊙*A* 于点 *F*、*E*、*G*。

（4）顺次连结点 *E*、*F*、*G*、*D*、*B*、*C*，作出正六边形。

解法二：

作法：

（1）任取一点 *A* 为圆心，以任意长为半径作圆，如图 4-3-22 所示。

（2）作出⊙*A* 的直径 *BC*。

（3）以 *B* 点为圆心，*AB* 长为半径作圆，交⊙*A* 于点 *D*、*E*。

（4）以 *C* 点为圆心，*AC* 长为半径作圆，交⊙*A* 于点 *F*、*G*

（5）顺次连结点 *F*、*D*、*B*、*E*、*G*、*C*，作出正六边形。

6．正八边形

尺规作图作出正八边形。

解法一（经典作法）：

作法：

（1）任取一点 *A* 为圆心，以任意长为半径作圆，如图 4-3-33 所示。

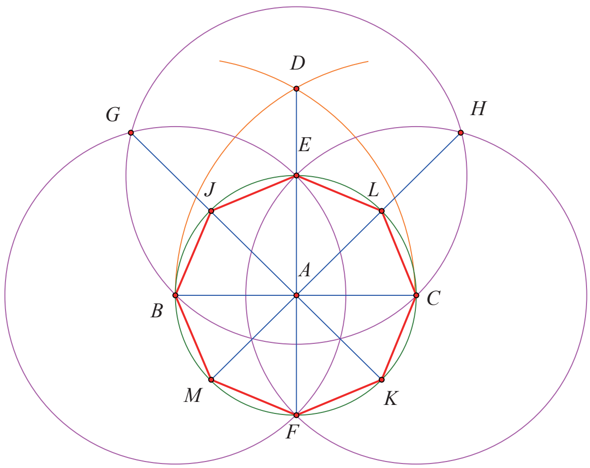


图 4-3-33

（2）作出⊙*A* 的直径 *BC*。

（3）分别以 B 点径、C 点为圆心，BC 长为半径作弧，交点为 D。

（4）作直线 AD，交⊙A 于点 E、F。

（5）分别以 B、E、C 点为圆心，BE 长为半径作圆，交点为 G、H。

（6）作直线 AG、AH，交⊙A 于点 J、K、L、M。

（7）顺次连结 E、J、B、M、F、K、C、L，作出正八边形。

解法二：

作法：

（1）任作一圆⊙O，并作出直径 AB，如图 4-3-34 所示。

（2）分别以 A、B 点为圆心，AB 为半径作弧，交点为 C。

（3）作直线 CO，交⊙O 于点 D、E。

（4）以 B 点为圆心，BO 长为半径作圆，交⊙O 于点 F、G。

（5）连结 FG，交 BO 于点 H。

（6）以 H 点为圆心，HO 长为半径作圆，交 FG 于点 J、K。

（7）作直线 OJ，交⊙O 于点 M、N；作直线 OK，交⊙O 于点 P、Q。

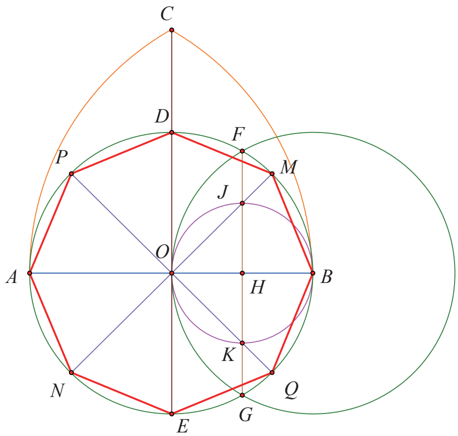


图 4-3-34

顺次连结 D、M、B、Q、E、N、A、P，作出正八边形。

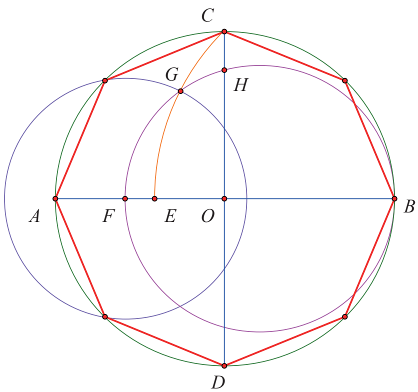


图 4-3-35

解法三：

作法：

（1）任作⊙O，并作两条垂直直径 $AB \perp CD$，如图 4-3-35 所示。

（2）以 B 点为圆心，BC 长为半径作弧，交 AB 于点 E。

（3）截取 $OF=AE$。

（4）以 FB 长为直径作圆，交⊙B 于点 G，交 CD 于点 H，则 OH 为正八边形边长；或者，以 F 点为圆心，FG 为半径作圆，与⊙O 的交点为正八边形的两个顶点，作出正八边形即可。

解法四：

作法：

（1）任取一点 A 为圆心，以任意长为半径作圆，如图 4-3-36 所示。

（2）作出⊙A 的直径 BC。

（3）分别以 B、C 点为圆心，AC 长为半径作弧，交点为 D。

（4）作直线 AD，交⊙A 于点 E、F。

（5）顺次连结点 E、B、F、C。

（6）以 C 点为圆心，AC 为半径作圆，交 EC 于点 G。

（7）以 A 点为圆心，AG 为半径作圆，交 BE、BF、FB、EC 于点 J、K、L、M、N、P、Q、G。

（8）顺次连结上面的八个点，作出正八边形。

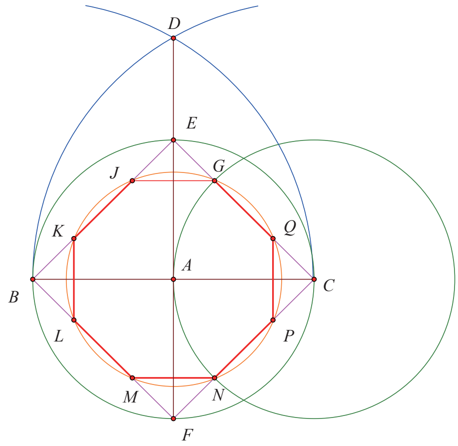


图 4-3-36

7．正十边形

尺规作图作出正十边形

解法一（经典作法）

作法：

（1）任取一点 A 为圆心，以任意长为半径作圆，如图 4-3-37 所示。

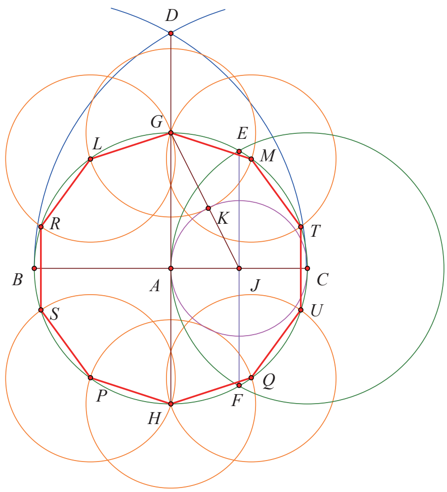


图 4-3-37

（2）作出直径 BC。

（3）分别以 B、C 点为圆心，BC 长为半径作弧，交点为 D。

（4）以 C 点为圆心，AC 长为半径作圆，交⊙A 于点 E、F。

（5）作直线 AD，交⊙A 于点 G、H。

（6）连结 EF，交 AC 于点 J。

（7）连结 GJ。

（8）以 J 点为圆心，AJ 长为半径作圆，交 GJ 于点 K。

（9）分别以 G 点、H 点为圆心，GK 长为半径作圆，交⊙A 于点 L、M、P、Q。

（10）分别以 L、M、P、Q 点为圆心，GK 长为半径作圆，交⊙A 于点 R、S、T、U。

（11）顺次连结点 G、L、R、S、P、H、Q、U、T 作出正十边形。

解法二：

作法：

（1）任取一点 A 为圆心，以任意长为半径作圆，如图 4-3-38 所示。

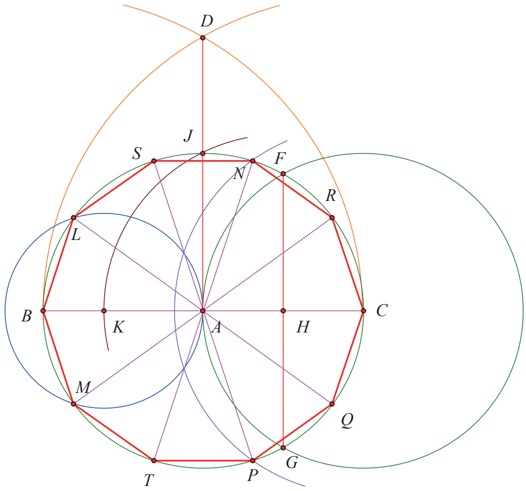


图 4-3-38

（2）作出直径 BC。

（3）分别以 B 点、C 点为圆心，BC 长为半径作弧，交点为 D 点。

（4）以 C 点为圆心，AC 长为半径作圆，交⊙A 于点 F、G。

（5）连结 FG，交 BC 于点 H。

（6）连结 DA，交⊙A 于点 J。

（7）以 H 点为圆心，HJ 长为半径作弧，交 BC 于点 K。

（8）以 K 点为圆心，AK 长为半径作圆，交⊙A 于点 L、M。

（9）以 C 点为圆心，LM 长为半径作弧，交⊙A 于点 N、P。

（10）作直线 LA、MA、PA、NA，交⊙A 于点 Q、R、S、T。

（11）顺次连结 N、S、L、B、M、T、P、Q、C、R，作出正十边形。

解法三：

作法：

（1）任取一点 A 为圆心，以任意长为半径作圆，如图 4-3-39 所示。

（2）作出直径 BC。

（3）以 C 点为圆心，AC 长为半径作圆，交⊙A 于点 D。

（4）以 D 点为圆心，AC 长为半径作圆，交⊙A 于点 E。

（5）作直线 AD，交⊙D 于点 F。

（6）连结 FC，交⊙C 于点 G。

（7）以 G 点为圆心，GC 为半径作圆，交⊙D 于点 H。

（8）以 E 点为圆心，EH 为半径作圆，交 BC 于点 J。

（9）以 J 点为圆心，AJ 为半径作圆，A 于点 K、L。

（10）以 C 点为圆心，KL 长为半径作弧，交⊙A 于点 M、N。

（11）分别以 B、M、N 点为圆心，LC 长为半径作圆，交⊙A 于点 P、Q、R、S。

（12）顺次连结点 R、P、B、Q、S、

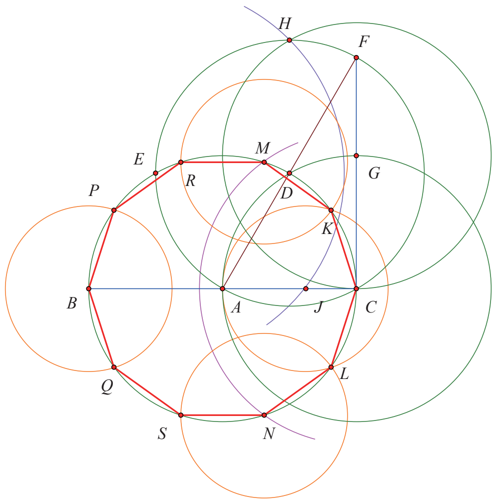


图 4-3-39

N、L、C、K、M，作出正十边形。

8．正十二边形

尺规作图作出正十二边形。

解法一：

作法：

（1）任取一点 A 为圆心，以任意长为半径作圆，如图 4-3-40 所示。

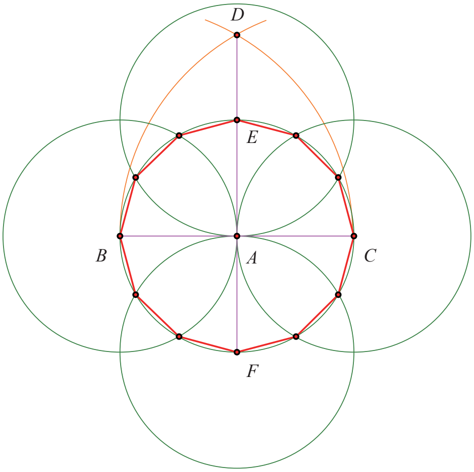


图 4-3-40

（2）作出⊙A 的直径 BC。

（3）分别以 B、C 点为圆心，BC 为半径作弧，交点为 D。

（4）作直线 AD，交⊙A 于点 E、F。

（5）分别以 E、F、B、C 点为圆心，AB 长为半径作圆，与⊙A 有八个交点。

（6）顺次连结⊙A 上所有顶点，作出正十二边形。

解法二（最简作法）：

作法：

（1）任取一点 A 为圆心，以任意长为半径作圆，如图 4-3-41 所示。

（2）在⊙A 上任取一点 B 为圆心，AB 为半径作圆，交⊙A 于 C、D 两点。

（3）以 C 为圆心，BC 为半径作圆，交⊙A 于 E，交⊙B 于 F 点。

（4）作直线 AF，交⊙A 于 G、H 两点。

（5）分别以 G、H 点为圆心，AB 长为半径作圆，与⊙A 有四个交点。

（6）顺次连结⊙A 上所有顶点，作出正十二边形。

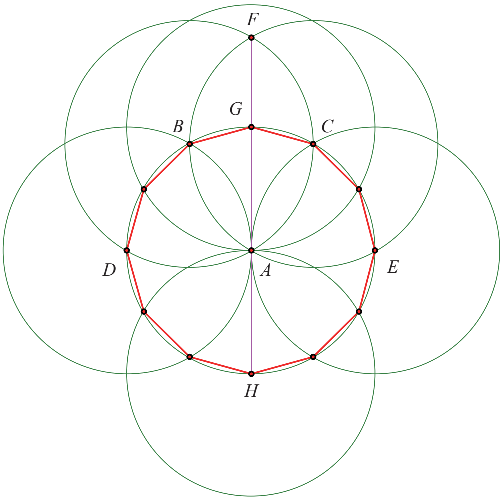


图 4-3-41

9．正十五边形

尺规作图作出正十五边形。

原理：因为 15=3×5，所以正十五边形可以由正三边形和正五边形叠加产生。

如图 4-3-42 所示，⊙O 的内接正三角形和正五边形，当 A 点重合，并且 BC//EF 时，那么 BE=FC=⊙O 内

接正十五边形边长。

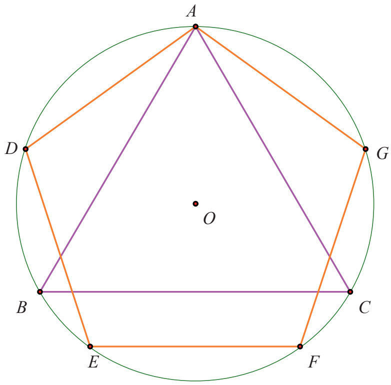


图 4-3-42

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-43 所示。

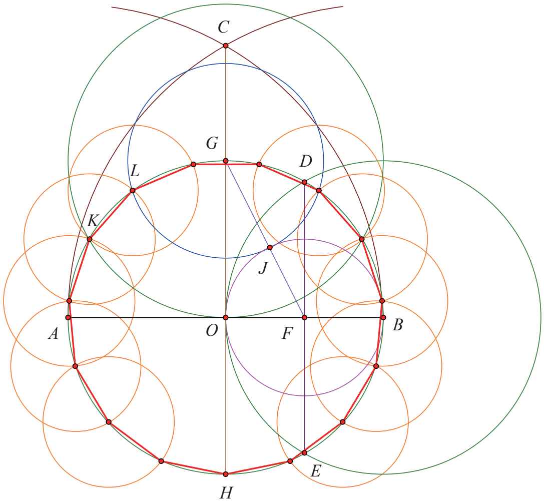


图 4-3-43

（2）作出⊙O 的直径 AB。

（3）分别以 A、B 点为圆心，AB 长为半径作弧，交点为 C。

（4）以 B 点为圆心，BO 为半径作圆，交⊙O 于 D、E 两点。

（5）连结 DE，交 AB 于 F 点。

（6）作直线 OC，交⊙O 于 G、H 两点。

（7）连结 GF。

（8）以 F 点为圆心，OF 为半径作圆，交 GF 于 J 点。

（9）以 G 点为圆心，GO 为半径作圆，交⊙O 于 K 点。

（10）以 G 点为圆心，GJ 为半径作圆，交⊙O 于 L 点，则 KL 为⊙O 内接正十五边形边长，余下过程略。

10. 正十六边形

尺规作图作出正十六边形。

解法一：

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-44 所示。

（2）作出直径 AB。

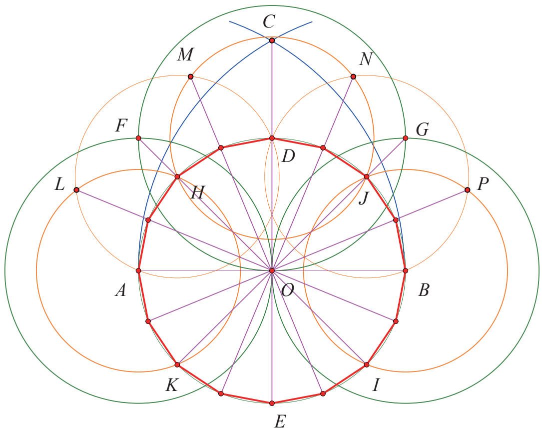


图 4-3-44

（3）分别以 A、B 点为圆心，AB 为半径作弧，交点为 C。

（4）作直线 CO，交⊙O 于 D、E 两点。

（5）分别以 A、D、B 为圆心，AO 长为半径作圆，交点为 F、G 两点。

（6）作直线 FO、GO，交⊙O 于 H、I、J、K 四点。

（7）分别以 A、H、D、J、B 点为圆心，AH 长为半径作圆，交点为 L、M、N、P 四点。

（8）作直线 LO、MO、NO、PO，得到正十六边形剩余所有顶点。

（9）顺次连结正十六边形所有顶点，作出正十六边形。

解法二：

作法：

（1）任作一⊙O，并作出两条垂直直径 $AB \perp CD$，两点 4-3-45 所示。

（2）以 B 点为圆心，BO 为半径作圆，交⊙O 于 E、F 两点。

（3）以 C 点为圆心，EF 长为半径作弧，交⊙B 于 G 点。

（4）连结 GO，交⊙O 于 H 点，则 BH 为⊙O 内接

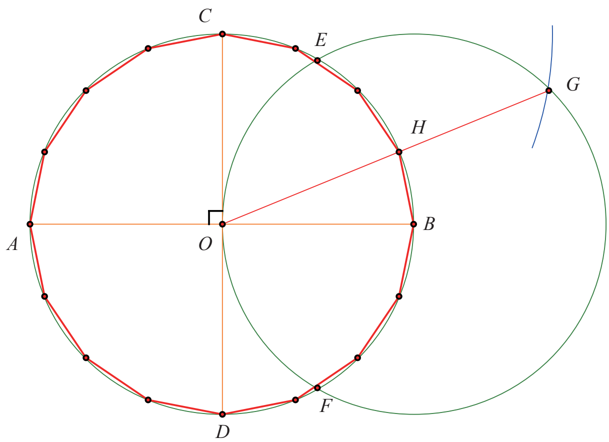


图 4-3-45

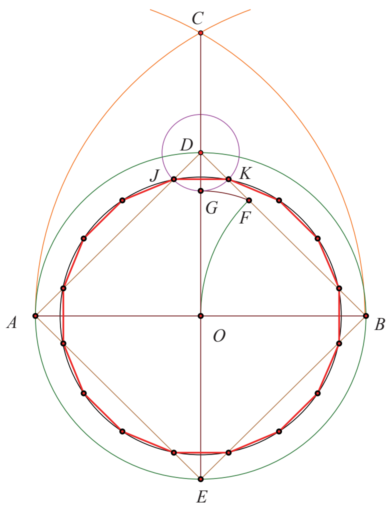


图 4-3-46

正十六边形边长，可作出正十六边形。

解法三：

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-46 所示。

（2）作出⊙O 的直径 AB。

（3）分别以 A、B 点为圆心，AB 为半径作弧，交点为 C。

（4）作直线 CO，交⊙O 于 D、E 两点。

（5）连结 AD、BD、AE、BE。

（6）以 B 点为圆心，BO 为半径作弧，交 BD 于 F 点。

（7）以 O 点为圆心，OF 为半径作弧，交 CO 于 G 点。

（8）以 D 点为圆心，DG 为半径作圆，交 AD 于 J 点，交 BD 于 K 点。

（9）以 O 点为圆心，OJ 为半径作圆，则 JK 为此圆的内接正十六边形边长，余下过程略。

11．正十七边形

在复平面上，一元 n 次方程有 n 个复根，所有的根共圆，并且平均分布在以原点为圆心的圆周上。高斯通过解 17 次方程 $Z^{17}-1=0$ 得出正十七边形的边长表达式后再转换用尺规作图作出：

$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}$$

或写成：

$$\cos\frac{2\pi}{17}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

知道正十七边形的边长表达式后，任何一位懂得尺规基本作图的人，都可以将正十七边形作出。不过这样步骤太复杂，图形尺寸太大，很不方便。简化作法需要对边长表达式进行适当变形或者重新推导，分步骤作图，例如：

令 $a=\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$，$b=-\dfrac{\sqrt{17}+1}{2}$，$c=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$，$d=\dfrac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}$

那么 $\cos\dfrac{2\pi}{17}=\dfrac{c+\sqrt{c^2-4d}}{4}$，这样作图就方便多了。

推导变形的形式多种多样，于是产生了各种各样的作法，高斯只算出了表达式，没有给出具体作图。

尺规作图作出正十七边形。

解法一：第一个正十七边形尺规作图（Johannes Erchinger 于 1825 年发表）

作法：

（1）作任意⊙O，作垂径 $CO \perp AB$，如图 4-3-47 所示。

（2）D 为 AO 中点，$DE \perp AB$，并且 $DE=DB$。

（3）$EF=EG=EC$。

（4）H 点为 FO 中点。

（5）$HJ=HC$。

（6）K 点为 JB 中点。

（7）$KL=KO$。

（8）$OM=OL$。

（9）N 点为 GO 中点。

（10）$NP=NC$。

（11）Q 点为 MP 中点。

（12）$QR=QC$。

（13）S 点为 OR 中点。

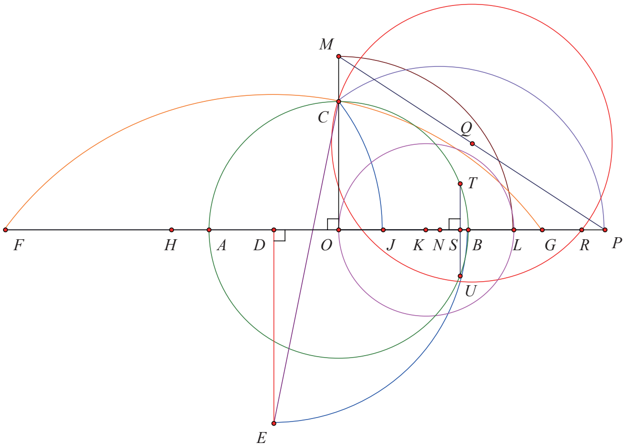


图 4-3-47

（14）过 S 点作 AB 的垂线，交⊙O 于 T、U 两点，则 $TB=BU=$⊙O 内接正十七边形边长。

解法二：里士满作法

这个作法很多资料和网友都说是高斯的作品，其实高斯当时只给出了正十七边形作图方法，没有给出具体实现作图的作法。这个作法是 1893 年英国剑桥大学国王学院教授里士满（Herbert W.Richmond）研究出来的，这个作法各种量的关系比较容易记忆，所以流传最广。

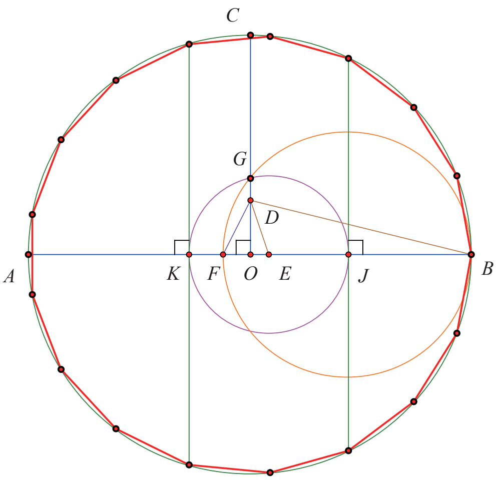


图 4-3-48

原理：

（1）作⊙O 的两条垂直直径 $AB \perp CO$，如图 4-3-48 所示。

（2）作 $OD=\dfrac{1}{4}CO$。

（3）作$\angle ODE=\dfrac{1}{4}\angle ODB$。

（4）作$\angle FDE=45°$。

（5）以 FB 为直径的圆交 CO 于 G 点。

（6）以 E 点为圆心，EG 为半径的圆交 AB 于 J、K 两点。

（7）过 J、K 点分别作 AB 的垂线，它们与⊙O 的交点与 B 点之间的弧长分别是 $\frac{3}{17}$ 和 $\frac{5}{17}$ 圆周。

明白里士满方法的原理后，不难作出正十七边形，但如果想精简作法则需要一定技巧。下面的作法就比较简洁，供大家参考。

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-49 所示。

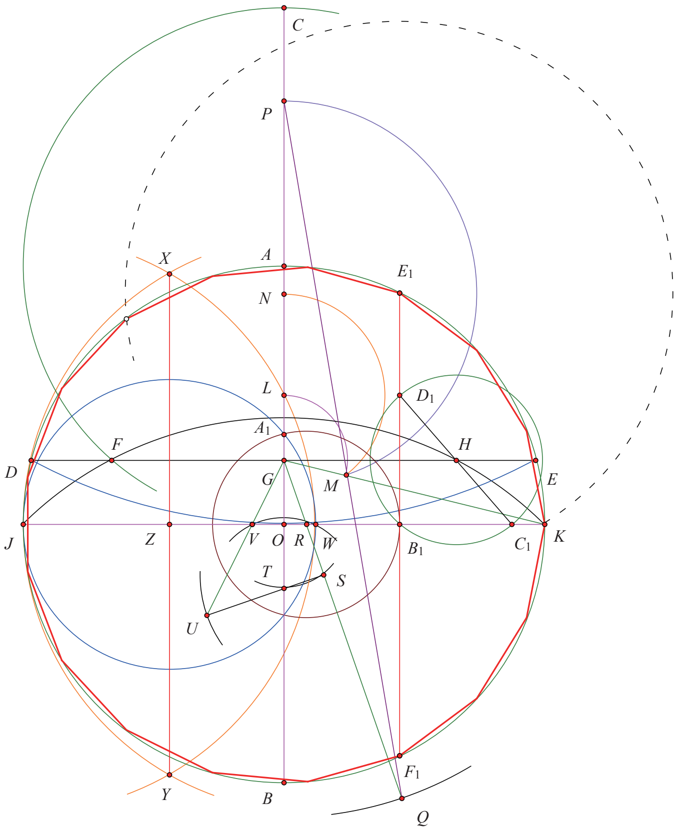


图 4-3-49

（2）在⊙O 上任取一点 A 为圆心，AO 长为半径作弧。

（3）作直线 AO，交⊙O 于点 B，交⊙A 于点 C。

（4）以 C 点为圆心，CO 长为半径作弧，交⊙O 于 D、E 两点。

（5）连结 DE，交⊙A 于点 F，交 AO 于点 G。

（6）以 B 点为圆心，BF 为半径作弧，交 DE 于 H 点，交⊙O 于 J、K 两点。

（7）连结 JK、GK。

（8）以 G 点为圆心，GO 为半径作弧，交 GK 于 M 点，交 AO 于 L 点。

（9）以 L 点为圆心，LM 为半径作弧，交 AO 于 N 点。
（10）以 N 为圆心，NM 为半径作弧，交 CO 于 P 点。
（11）作直线 PM。
（12）以 G 点为圆心，GP 长为半径作弧，交 PM 于 Q 点。
（13）连结 GQ，交 JK 于 R 点。
（14）以 O 点为圆心，OG 为半径作弧，交 GQ 于 S 点，交 BO 于 T 点。
（15）作直线 ST。
（16）以 S 点为圆心，SG 为半径作弧，交 ST 于 U 点。
（17）连结 GU，交 JK 于 V 点。
（18）以 T 点为圆心，TV 为半径作弧，交 JK 于 W 点。
（19）分别以 J、W 点为圆心，JW 为半径作弧，交点为 X、Y。
（20）连结 XY，交 JK 于 Z 点。
（21）以 Z 点为圆心，JZ 为半径作圆，交 AO 于 A_1 点。
（22）以 R 点为圆心，RA_1 为半径作圆，交 JK 于 B_1 点。
（23）以 H 点为圆心，HB_1 为半径作圆，交 JK 于 C_1 点。
（24）作直线 HC_1，交⊙H 于 D_1 点。
（25）作直线 B_1D_1，交⊙O 于 E_1、F_1 两点，此时，$\angle E_1OK=3\dfrac{360^\circ}{17}$。

下面从 E_1 开始，以 E_1K 为长不断在⊙O 上截取（如图 4-3-49 虚线所示），作出正十七边形的所有顶点。为了简化，不必再截取 15 次，从 K 点开始在两边各截取 2 次后就出现正十七边形的边长，此时改用边长截取，总共截取 9 次就得到所有顶点。第 7 步连结 GK，是因为 M 点在 GK 上，如果不怕图形画得太大，那么第 7 步连结 GK 可以省略，相应的第 8 步直接用 GK 为半径开始作弧。此时，圆作法的 M 点就变为了此时的 K 点，简化了一步。

第 18 步是为了解决垂直平分线和垂线靠太近而难以辨认的问题，而将垂直平分线改为左侧作图，如果仍旧右侧作图，则此步可以省去。所以前面作图最少是 24 步，加上截取顶点 9 步，最后连结 17 条边 17 步，用里士满方法一个完整作图的最少步数是 50 步。

解法三：塞雷作法

此作法是法国塞雷（J.A.Serret，1819-1885）的作品。

作法：

（1）⊙O 的两条垂径 $AB\perp CO$，如图 4-3-50 所示。
（2）作 $DO=\dfrac{1}{4}AO$。
（3）以 D 点为圆心，DC 长为半径作圆，交 AB 于 E、F 两点。
（4）$EG=EC$。
（5）$FH=FC$。

（6）以 AG 为直径作圆交 CO 于 J 点。

（7）以 J 点为圆心，$\frac{1}{2}OH$ 长为半径作弧，交 AB 于 K 点。

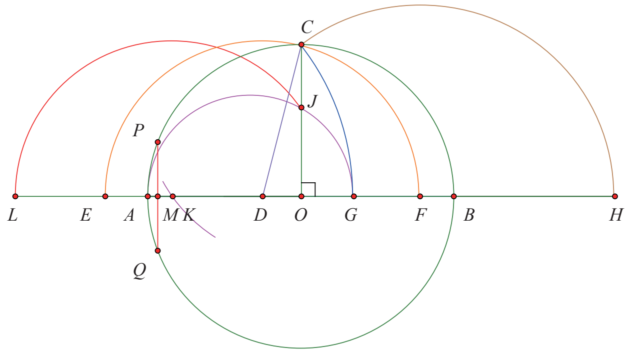


图 4-3-50

（8）$KL=KJ$。

（9）M 点为 LO 中点。

（10）过 M 点作 AB 的垂线，交⊙O 于 P、Q 两点，则 $PA=PQ=$⊙O 内接正十七边形边长。

解法四：

作法：

（1）作⊙O 的两条垂径 $CO\perp AB$，如图 4-3-51 所示。

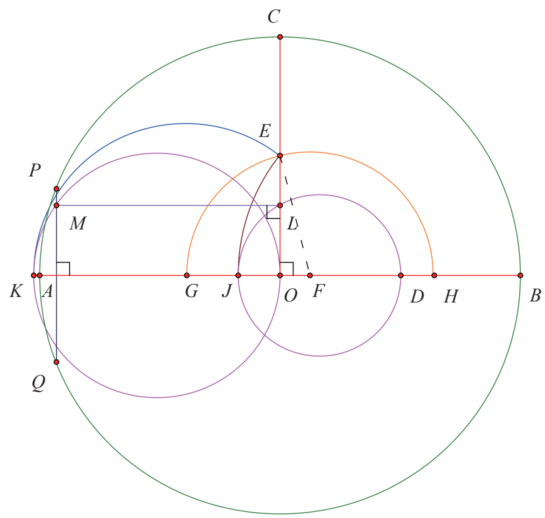


图 4-3-51

（2）E 点为 CO 的中点，D 点为 BO 的中点。

（3）$OF=\frac{1}{4}OD$。

（4）以 F 点为圆心，EF 为半径的圆，交 AB 于 G、H 两点。

（5）$HJ=HE$。

（6）$GK=GE$（K 点在 A 点左侧）。

（7）以 JD 为直径的圆交 CO 于 L 点。

（8）过 L 点作 CO 的垂线 ML。

（9）以 KO 为直径的圆交 ML 于 M 点。

（10）过 M 点作 AB 的垂线，交⊙O 于 P、Q 两点，则 $PA=AQ=$⊙O 内接正十七边形边长。

解法五：

作法：

（1）BC 为⊙A 的直径，如图 4-3-52 所示。

（2）作 $BD\perp BC$，且 $BD=AB$。

（3）作 $BE=\frac{1}{4}AB$。

（4）以 E 点为圆心，ED 为半径的圆交 AB 于 F、G 两点。

（5）$FJ=FD$。

（6）$GH=GD$。

（7）过 J 点作 AB 的垂线，并截取 $KJ=BH$。

（8）以 DK 为直径的圆交 BC 于点 L。

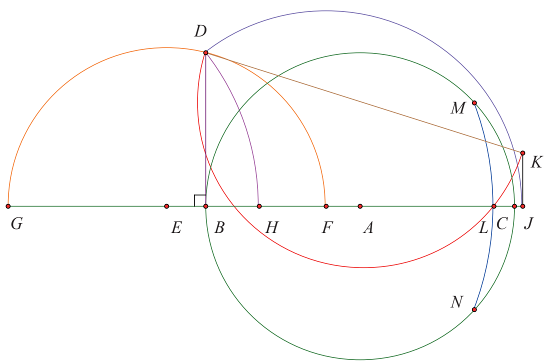


图 4-3-52

（9）以 B 点为圆心，BL 为半径的圆交⊙A 于 M、N 两点，则 M、C、N 为正十七边形的三个顶点，M 与 C 之间、C 与 N 之间各自间隔了正十七边形的一个顶点。

解法六：莫海亮作法

里士满方法虽然容易记忆，却不是最简的作图方法。例如，笔者给出的下面这个作法，至少比里士满方法简化五步，原理如图 4-3-53 所示。

原理：

（1）作⊙O 的两条垂直半径 $AO\perp BO$，如图 4-3-53 所示。

（2）取 $OC=\frac{1}{4}AO$。

（3）以 C 点为圆心，BC 长为半径作圆，交 AO 于 D、E 两点。

（4）$EF=EB$。

（5）以 AF 为直径的圆交 OB 于 G 点。

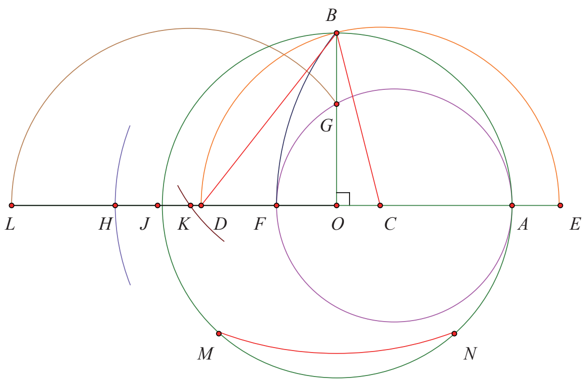


图 4-3-53

（6）$OH=BD$

（7）J 点为 HD 的中点(不在⊙O 上)。

（8）以 G 点为圆心，OJ 长为半径作弧，交 AO 于 K 点。

（9）$KL=KG$。

（10）以 B 点为圆心，OL 长为半径作弧，交⊙O 于 M、N 两点，则$\angle MON=4\dfrac{360^{\circ}}{17}$，余下过程略。

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 4-3-54 所示。

（2）在⊙O 上任取一点 A 为圆心，AO 为半径作圆。

（3）作直线 AO，交⊙O 于点 B，交⊙A 于点 C。

（4）以 C 点为圆心，CO 为半径作弧，交 O 于 D、E 两点。

（5）连结 DE，交 AB 于点 F，交⊙A 于点 G。

（6）以 B 点为圆心，BG 为半径作弧，交⊙O 于点 H。

（7）连结 OH。

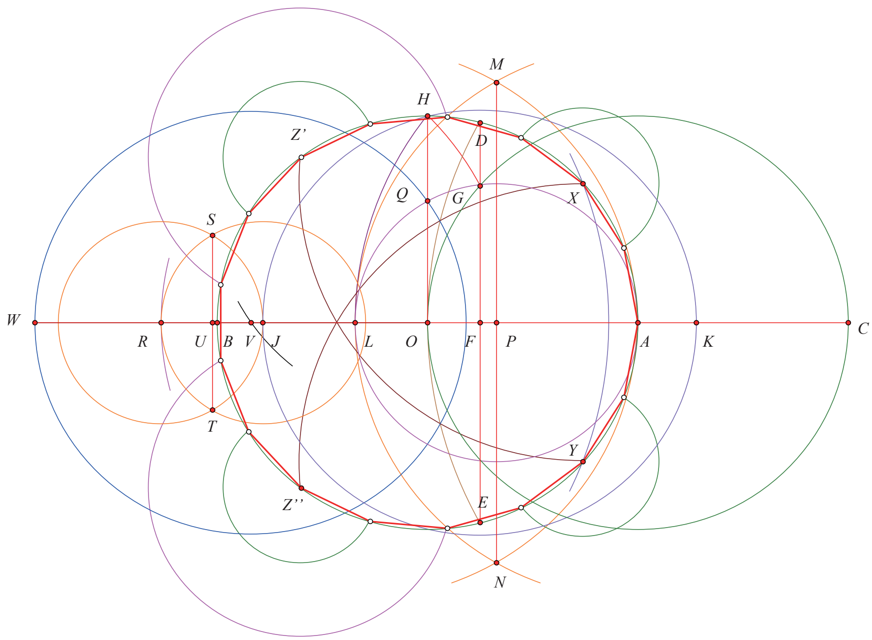


图 4-3-54

（8）以 F 点为圆心，FH 为半径作圆，交 AB 于 J、K 两点。

（9）以 K 为圆心，KH 为半径作弧，交 AB 于 L 点。

（10）分别以 L、A 为圆心，LA 为半径作弧，交点为 M、N。

（11）连结 MN，交 AB 于 P 点。

（12）以 P 点为圆心，PA 为半径作圆，交 OH 于 Q 点。

（13）以 O 为圆心，HJ 长为半径作弧，交 AB 于 R 点。

（14）分别以 R、J 为圆心，RJ 为半径作圆，交点为 S、T。

（15）连结 ST，交 AB 于 U 点（在 B 点左侧）。

（16）以 Q 点为圆心，OU 长为半径作弧，交 AB 于 V 点。

（17）以 V 点为圆心，VQ 为半径作弧，交 AB 于 W 点。

（18）以 B 点为圆心，OW 长为半径作弧，交⊙O 于 X、Y 两点。

（19）分别以 X、Y 为圆心，XY 长为半径作弧，交⊙O 于 Z'、Z''两个顶点。

（20）分别以 Z'、Z''为圆心，XA 为半径作弧，得到四个顶点，并且左侧相邻两点为正十七边形边长。

（21）分别以 Z'、Z''、X、Y 为圆心，正十七边形边长长度为半径作弧，得到八个顶点。

（22）将所有顶点按顺序连结，作出正十七边形。

作出所有顶点用 28 步，连结 17 条边用 17 步，总共 45 步。图形外观极具对称性。

第五章 圆之吻

圆与圆相切被形象地称之为“圆之吻”。本章主要研究圆与直线相切、圆与圆相切的尺规作图问题。这类问题历史悠久，种类繁多，难度颇大，趣味无穷，很多大数学家做过深入研究，解法琳琅满目。

用传统的几何学解决这类问题有一定难度，阿波罗尼奥斯和韦达的解法是这方面解法的代表。由于圆的圆心轨迹一般都是圆锥曲线，解题时很自然会想到用圆锥曲线或其他高等数学曲线来求解，思路简单，不过很难转换为尺规作图，牛顿有成功的例子。用解析几何学求解，笛卡尔是先驱，思路不太复杂，但求解过程及结果非常复杂，不容易用尺规完成作图。用反演理论求解，不仅思路简单，而且也很容易用尺规完成作图，反演几何变换在这个领域是个利器。当然，随着研究的深入，不用反演法也可以获得简洁解法。

考虑到读者不一定了解反演几何知识，所以在本章会先介绍有限的一些反演几何学知识，帮助大家理解解题的原理，高手可以直接跳过。

第一节 反演几何学部分基础知识

二维平面上的反演

以一个特定的反演圆（也叫“反演基圆”）$\odot O$ 为基础，圆心 O 为反演中心（也叫“反演极”），圆半径为常数 r（叫“反演半径或反演幂”）。把点 P 反演为点 P'，就是使得$|OP||OP'|=r^2$。P 与 P'关于$\odot O$ 互为反演点，它们是一对关于反演基圆$\odot O$ 的共轭点。

极点与极线

点 P 关于$\odot O$ 的共轭点为 P'，过 P'点并且垂直于 OP'的直线就叫做点 P 关于$\odot O$ 的极线。点 P 称作该极线关于$\odot O$ 的极点。

已知极点求作极线尺规作图

1．极点 P在圆外

已知反演圆$\odot O$，圆心为 O 点，圆外一点 P，求作 P 点的极线。

作法：

（1）过 P 点作$\odot O$ 的两条切线，切点为 A、B，如图 5-1-1 所示。

（2）作直线 AB，则 AB 为 P 点的极线。

2．极点 P在圆上

已知反演圆$\odot O$，圆心为 O 点，圆上一点 P，求作 P 点的极线。

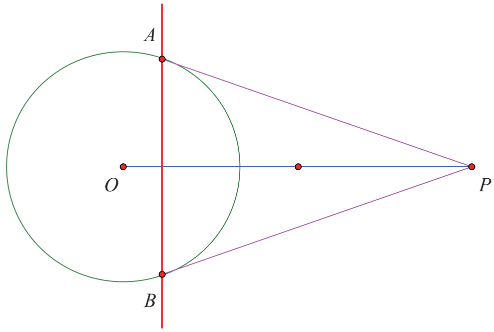


图 5-1-1

作法：

过 P 点作⊙O 的切线即为 P 点的极线，如图 5-1-2 所示。

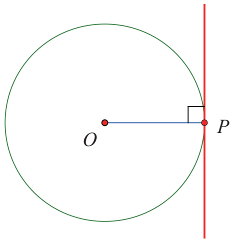


图 5-1-2

3．极点 P 在圆内（作法与 P 点在圆外正好相反）

已知反演圆⊙O，圆心为 O 点，圆内一点 P，求作 P 点的极线。

解法一：

作法：

（1）过 P 点作 OP 的垂线，交⊙O 于 A 点，如图 5-1-3 所示。

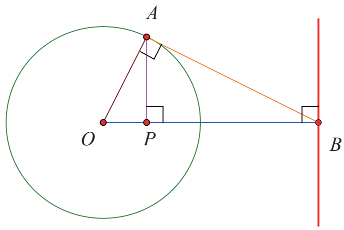


图 5-1-3

（2）连结 AO。

（3）过 A 点作 AO 的垂线，交直线 OP 于 B 点。

（4）过 B 点作 OP 的垂线，则该垂线为 P 点的极线。

解法二：

作法：

（1）过 P 点任作两条弦 AB 和 CD，如图 5-1-4 所示。

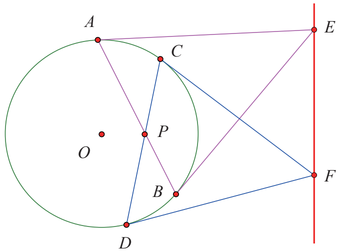


图 5-1-4

（2）分别过 A、B 点作⊙O 的切线，交点为 E；分别过 C、D 点作⊙O 的切线，交点为 F。

（3）作直线 EF，则 EF 为 P 点的极线。

已知极线求作极点尺规作图

过圆心 O 作极线的垂线，垂足即为所求极点的反演点。作出该点的反演点就是所求极线的极点，具体作图下面详细介绍。

反演尺规作图

1．点的反演

情况一：点 P 在圆外

已知反演圆⊙O，圆心为 O 点，圆外一点 P，求作 P 点的反演点。

解法一：

原理：过点 P 作圆的两条切线，两个切点连线与 OP 直线的交点就是 P'。

作法：

（1）作 OP 的中点 A，如图 5-1-5 所示。

（2）以 A 点为圆心，AO 为半径作圆，交⊙O 于 B、C 两点。

（3）连结 BC，交 OP 于 P'点，则 P'点为 P 点的反演点（此时 BP、CP 为过 P 点⊙O 的切线）。

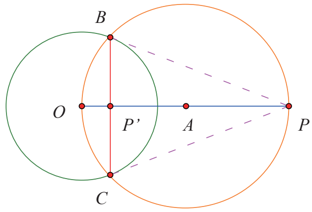


图 5-1-5

解法二：

作法：

（1）以 PO 为半径作圆，交⊙O 于 A、B 两点。

（2）分别以 A、B 点为圆心，AO 长为半径作圆，交点为 P'，则 P'点为 P 点的反演点。

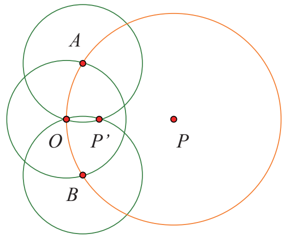


图 5-1-6

情况二：点 P 在圆内

已知反演圆⊙O，圆心为 O，圆内一点 P，求作 P 点的反演点。

原理：连结 OP，过 P 点作直线垂直于 OP，在垂线与圆的两个交点处作两条圆的切线，切线交点就是 P'（与 P 点在圆外时反演点作法正好相反，如图 5-1-7 所示）。

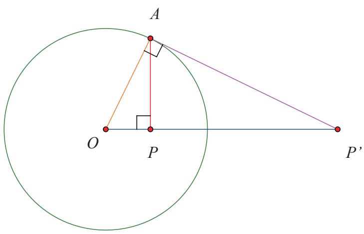


图 5-1-7

作法：

（1）过 P 点作 OP 的垂线，交⊙O 于 A 点。

（2）连结 AO。

（3）过 A 点作 AO 的垂线，交直线 OP 于 P'点，则 P'点为 P 点的反演点。

情况三：点 P 在圆上

在反演基圆上的点的反演点仍是它自身，图示略。

2．直线的反演

情况一：直线经过反演中心

经过反演中心的直线反演图形仍是这条直线本身。（这里要注意一下：从外观看此直线与原直线一样，实际上除了直线与圆的两个交点没有变动位置之外，直

线上的所有点都变动了位置）

情况二：直线不经过反演中心（细分为三种情况）

1）直线与反演圆相离

已知反演圆⊙O，圆心为 O 点，直线 AB 在⊙O 外，求作直线 AB 的反演图形。

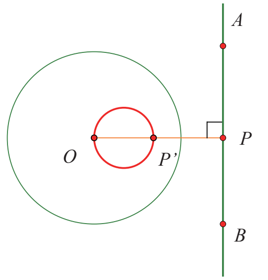


图 5-1-8

作法：

（1）过 O 点作 AB 的垂线，垂足为 P 点，如图 5-1-8 所示。

（2）作 P 点的反演点 P'。

（3）以 OP'为直径作圆，则该圆为直线 AB 的反演图形。

2）直线与反演圆相切

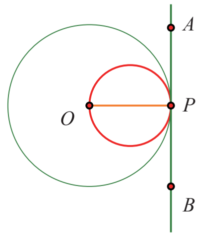


图 5-1-9

已知反演圆⊙O，圆心为 O 点，直线 AB 与⊙O 相切，切点为 P，求作直线 AB 的反演图形。

作法：

以 PO 为直径的圆即为直线 AB 的反演图形，如图 5-1-9 所示。

3）直线与反演圆相交

已知反演圆⊙O，圆心为 O 点，直线 AB 与⊙O 的交点为 A、B，求作直线 AB 的反演图形。

作法：

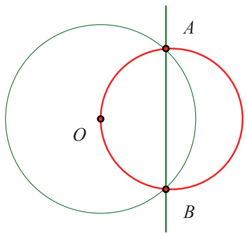


图 5-1-10

过 A、B、O 三点的圆即为直线 AB 的反演图形，如图 5-1-10 所示。

3．圆的反演

情况一：圆经过反演中心

经过反演中心的圆的反演图形是一条直线，如图 5-1-11 所示。

已知反演圆⊙O，圆心为 O 点，⊙A 经过反演极 O 点，圆心为 A 点，求作⊙A 的反演图形。

作法：

（1）作直线 AO，交⊙A 于 P 点，如图 5-1-11 所示。

（2）作出 P 点的反演点 P'。

（3）过 P'点作 OA 的垂线，该垂线即为⊙A 的反演图形。

情况二：圆不经过反演中心

不经过反演中心的圆的反演图形是一个圆，如图 5-1-12 所示。

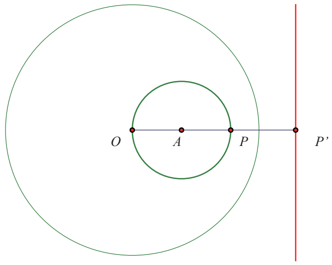


图 5-1-11

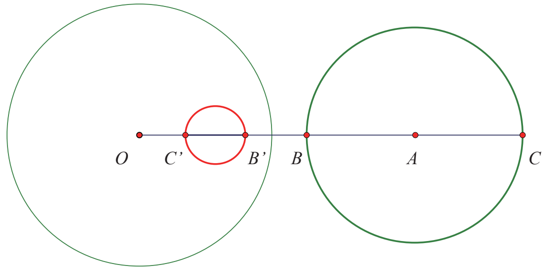


图 5-1-12

已知反演圆⊙O，圆心为 O 点，⊙A 不经过反演极 O 点，圆心为 A，求作⊙A 的反演图形。

作法：

（1）作直线 OA，交⊙A 于 B、C 两点。

（2）作出 B 点的反演点 B'；作出 C 点的反演点 C'。

（3）以 $B'C'$为直径的圆即为⊙A 的反演圆。

注意：

当⊙A 与⊙O 相交或内含时，作法与上面作法类似。

当⊙A 与⊙相切（内切和外切）时，切点 B 的反演点仍旧是 B 点，所以只需要作出 C 点的反演点 C'就够了，以 BC'为直径的圆就是其反演图形。

明白了上面的反演变换不难知道：

（1）怎样才能让一条直线经过反演变换后保持不变？在直线上任取一点 O，以它为圆心任作一圆，这样以⊙O 为反演圆的反演变换，直线仍旧是它自身。

（2）怎样才能让一个圆经过反演变换后保持不变？在⊙O 上任取一点 A，作直线 AB 垂直于 AO，在 AB 上任取一点 P 为圆心，PA 为半径作圆，则⊙O 以⊙P 为反演圆的变换的结果仍旧是⊙O 本身。

圆幂

指一点相对于一个圆的幂。

已知⊙O，半径长为 R，对于平面上任一点 P，令 $\rho = OP^2 - R^2$，则 ρ 称为点 P 对于圆 O 的幂。

圆幂尺规作图

情况一：点 P 在⊙O 外

已知⊙O 及⊙O 外一点 P，求作 P 点对于⊙O 的幂，如图 5-1-13 所示。

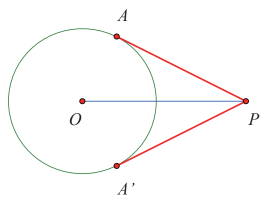


图 5-1-13

作法：

过 P 点作⊙O 的两条切线，切点为 A 和 A'（此时 $PA=PA'$）。则 PA 或 PA'为 P 点对于⊙O 的幂。

情况二：点 P 在⊙O 上

点 P 在圆 O 上时，圆幂等于 0（过点 P 作圆的切线，切点也是 P 点本身，所以点 P 到切点的长度等于 0，图示略）。

情况三：点 P 在⊙O 内

已知⊙O 及⊙O 内一点 P，求作 P 点对于⊙O 的幂。

作法：

过 P 点作 OP 的垂线，交⊙O 于 A、B 两点（此时 $PA=PB$），如图 5-1-14 所示，则 PA 或 PB 为 P 点对于⊙O 的幂。

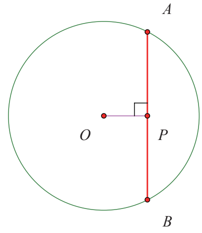


图 5-1-14

根轴

已知平面上有两个不同圆心的圆，则对两圆圆幂相等的点的集合是一条直线，这条直线称作这两个圆的根轴（也叫等幂轴）。

定理：（1）两圆的根轴垂直于这两圆的连心线（圆心连线）。

（2）两个同心圆无根轴。

根轴尺规作图

情况一：两圆相离

已知⊙A 和⊙B 相离，求作其根轴。

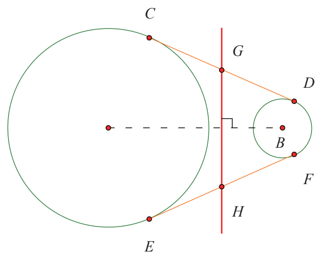


图 5-1-15

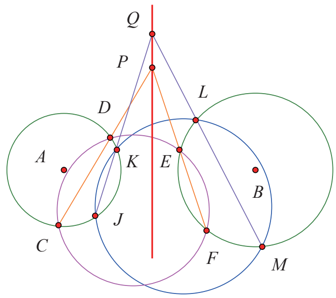


图 5-1-16

解法一：

作法：

（1）作出⊙A、⊙B 的公切线 CD、EF，切点为 C、D、E、F，如图 5-1-15 所示。

（2）作出线段 CD、EF 的中点 G、H。

（3）作直线 GH，则 GH 为⊙A、⊙B 的根轴。

解法二：

作法：

（1）任作一个和⊙A、⊙B 相交的圆，交点为 C、D、E、F；同上，继续任作一圆，得到交点 J、K、L、M，如图 5-1-16 所示。

（2）作直线 CD、EF，交点为 P；作直线 JK、LM，交点为 Q。

（3）作直线 PQ，则 PQ 为⊙A 和⊙B 的根轴。

情况二：两圆外切

已知⊙A、⊙B 相切，切点为 C 点，求作其根轴。

作法：

（1）连结 AB，如图 5-1-17 所示。

（2）过 C 点作 AB 的垂线，垂线即为⊙A、⊙B 的根轴。

情况三：两圆相交

已知⊙A、⊙B 相交，交点为 C、D，求作其根轴。

作法：

作直线 CD，则 CD 为⊙A、⊙B 的根轴，如图 5-1-18 所示（当然，此时 CD 也经过两圆公切线切点连线的中点）。

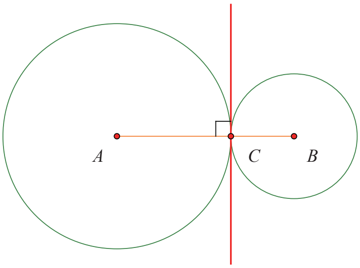


图 5-1-17

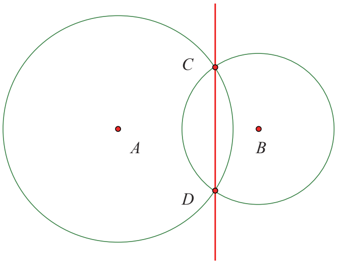


图 5-1-18

情况四：两圆内切

已知⊙A、⊙B 相内切，切点为 C 点，求作其根轴。

作法：

（1）作直线 AB，如图 5-1-19 所示。

（2）过 C 点作 AB 的垂线，则该垂线为⊙A、⊙B 的根轴。

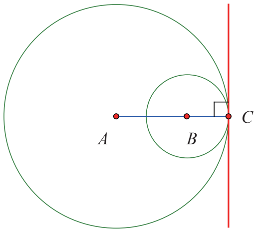


图 5-1-19

情况五：两圆内含

已知⊙A、⊙B 内含于⊙A，求作这两圆的根轴。

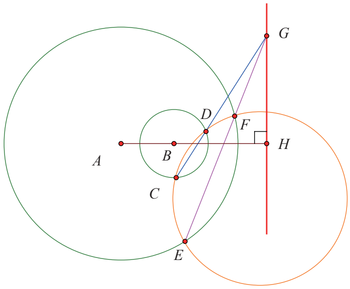


图 5-1-20

作法：

（1）任作一圆与⊙A、⊙B 都相交，交点为 C、D、E、F，如图 5-1-20 所示。

（2）作直线 CD、EF，交点为 G。

（3）作直线 AB。

（4）过 G 点作 AB 的垂线 GH，则 GH 为⊙A、⊙B 的根轴。

蒙日定理（根心定理）

根心是对于平面三个圆的概念。平面上任意三个圆，若这三个圆圆心不共线，则三条根轴交于一点，这个点叫做这三个圆的根心（也叫等幂心）；若三个圆圆心共线，则三条根轴互相平行。这条定理叫蒙日定理或根心定理。

位似

如果两个多边形不仅相似，而且对应顶点的连线相交于一点，对应边互相平行，则这两个图形叫做位似图形。任意两个圆都是位似图形。

位似中心

位似图形每组对应点的连线交于一点，这个点叫做位似中心。

两圆位似中心尺规作图

任何两个圆都是位似图形，一般有两个位似中心，外公切线交点 A 为两圆外位似中心；内公切线交点 B 为两圆内位似中心，如图 5-1-21 所示。

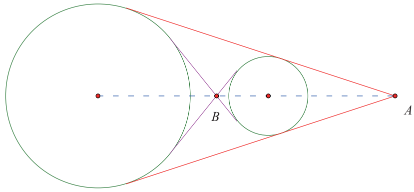


图 5-1-21

圆的正位似点、逆位似点

圆的正、逆位似点是对于圆的位似中心的概念。一般情况下，圆的位似中心有内位似中心和外位似中心两个，所以正、逆位似点分两种情况。

情况一：相对于圆的外位似中心的正、逆位似点

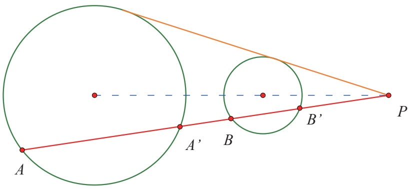


图 5-1-22

点 P 为两圆的外位似中心，如图 5-1-22 所示，则 A、B 互为正位似点；A'、B'互为正位似点；A、B'互为逆位似点；A'、B 互为逆位似点。

情况二：相对于圆的内位似中心的正、逆位似点

点 P 为两圆的内位似中心，如图 5-1-23 所示，则 A、B'两点互为正位似点；A'、B 两点互为正位似点；A、B 两点互为逆位似点；A'、B'两点互为逆位似点。

结论：（这个结论对于解决阿波罗尼奥斯问题很有帮助）

与两个已知圆都相外切或内切的任意一圆，其两个切点是关于两个已知圆外位似中心的一对逆位似点；

与两个已知圆一个外切，另一个内切的任意一圆，其两个切点是关于两个已知圆内位似中心的一对逆位似点。

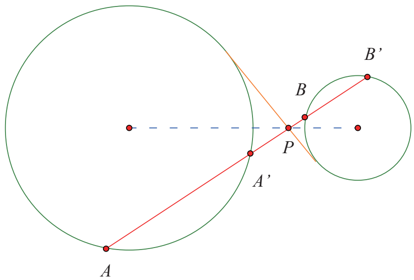


图 5-1-23

我们还可以得到另一个结论：

通过两个已知圆的一对逆位似点，并且与其中一个已知圆相切的圆，必然与另一个已知圆相切，切点就是这对逆位似点。

位似轴

位似轴是对于三个圆的概念，三个圆共有四条位似轴。

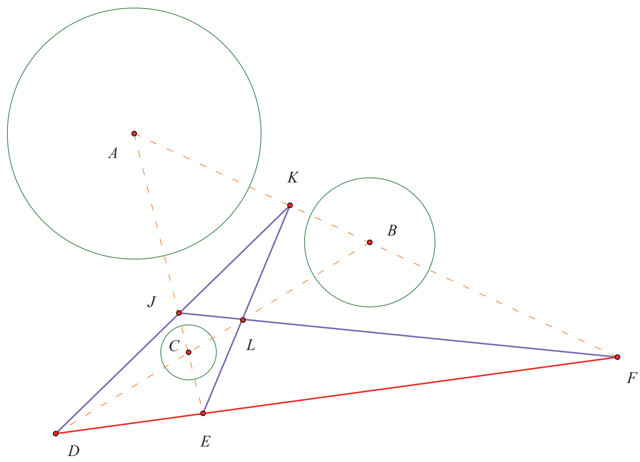


图 5-1-24

外位似轴：三个圆的三个外位似中心共线，这条直线就叫做三个圆的外位似轴；内位似轴：一个外位似中心和另两个内位似中心共线，这样的直线有三条，叫做三个圆的内位似轴。

已知⊙A、⊙B、⊙C 三个圆，如图 5-1-24 所示，D 点为⊙B、⊙C 的外位似中心；E 点为⊙A、⊙C 的外位似中心；F 点为⊙A、⊙B 的外位似中心；J 点为⊙A、⊙C 的内位似中心；K 点为⊙A、⊙B 的内位似中心；L 点为⊙B、⊙C 的内位似中心；那么 D、E、F 三点共线，这条直线叫做⊙A、⊙B、⊙C 的外位似轴。

D、J、K 三点共线；E、L、K 三点共线；J、L、F 三点共线，这三条直线叫做⊙A、⊙B、⊙C 的内位似轴。

一般情况下，三个圆有四条位似轴：一条外位似轴，三条内位似轴。

第二节

作三个相切圆

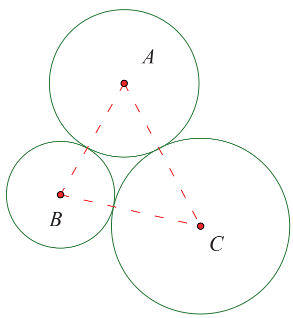


图 5-2-1

已知 A、B、C 三点，三点不共线，尺规作图求作以这三点为圆心的三个两两相切圆。

情况一：三个圆互相外切（如图 5-2-1 所示）

分析：

设三个圆的半径长分别为 a、b、c，则有 $2(a+b+c)=AB+BC+AC$，根据加减法不难作出三个圆的半径长 a、b、c。

情况二：两圆外切，同时内切于第三个圆（如图 5-2-2 所示）

有三个答案，这里仅给出一种。

分析：

设三个圆的半径分别为 a、b、c，其中 c 最大，那么 $c-a+c-b+a+b=AB+BC+AC$，于是 $2c=AB+BC+AC$，轻松作出最大的圆。分别假设 a、b、c 为最大圆，可以得到三个答案，余下略。

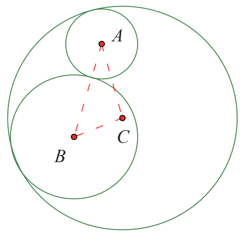


图 5-2-2

第三节 Soddy 圆

简介

1936 年索迪（Frederick Soddy，1877—1956，英国物理学家、化学家），在国际著名科学杂志《自然》上用诗歌的形式发表了三个圆两两相切时的解法，后来称这种相切圆的解圆为“Soddy 圆”。

同时与三个已知圆相内切的圆叫做“外 Soddy 圆”；同时与三个已知圆相外切的圆叫做“内 Soddy 圆”。

Soddy 圆作图问题

已知平面上有三个圆，并且三个圆两两相切，求作一圆同时和这三个圆相切。

阿波罗尼奥斯问题第十个问题是：已知平面上有三个圆，求作同时和这三个圆相切的圆。三个圆的相对位置情况比较复杂，显然，Soddy 圆问题是阿波罗尼奥斯问题的一个特例，所以可以用解阿波罗尼奥斯问题的一般方法求解。不过因为这个问题比较特殊，有比较简单的解决办法，解法如图 5-3-1 所示。

已知平面上三个圆⊙A、⊙B、⊙C，三个圆两两相切，切点为 D、E、F，求作一圆同时和⊙A、⊙B、⊙C 相切。

作法：

（1）作直线 AB。

（2）作直线 EF，交 AB 于 G 点。

（3）过 G 点作⊙C 的切线，切点为 H、J。

（4）重复步骤（1）、（2）、（3），分别求出三个圆的切点 J、K、L 和 M、N、H。

（5）过 J、K、L 三点的圆为外 Soddy 圆，与⊙A、⊙B、⊙C 的切点为 J、K、L 点；过 M、N、H 三点的圆为内 Soddy 圆，与⊙A、⊙B、⊙C 的切点为 M、N、H 点，

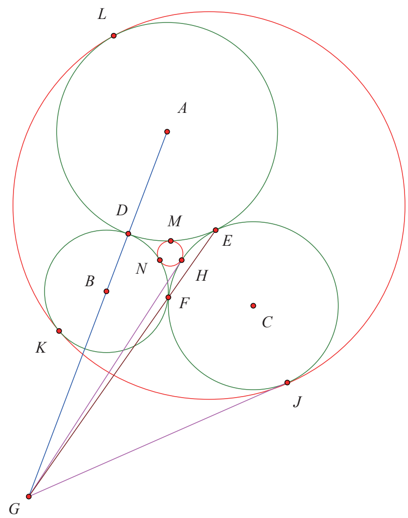


图 5-3-1

则这两个圆为所作的圆。

第四节
阿波罗尼奥斯问题

阿波罗尼奥斯问题（Apollonius’ Problem）简介

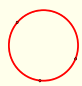
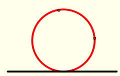
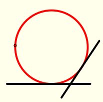
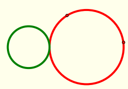
阿波罗尼奥斯（Apollonius of Perga，约公元前 262-公元前 190），古希腊数学家，佩尔格（Perga 或 Perge）地方的人。古代黑海与地中海之间的地区称为安纳托利亚（Anatolia，今属土耳其），其南部有古国潘菲利亚（Pamphylia），佩尔格是它的主要城市。

阿波罗尼奥斯对圆锥曲线的研究非常全面深入，他总结前人知识并加上自己的研究写成了《圆锥曲线论》（Conics）八大卷，将圆锥曲线的性质网罗殆尽，几乎使后人没有插足的余地，直到 17 世纪的帕斯卡（Pascal）和笛卡儿（Descartes）研究后才有实质性的推进。

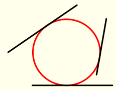
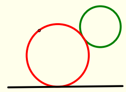
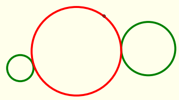
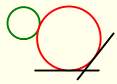
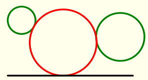
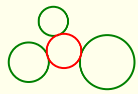
阿波罗尼奥斯问题是阿波罗尼奥斯在其著作《论接触》里提出的问题：给定 3 个图形，可以是点、直线或圆，求作一圆，当给出的图形是点时，则通过该点；当给出的图形是直线或圆时，则与之相切。

根据给定的 3 个图形元素，可以将阿波罗尼奥斯问题分为 10 种类型（见“阿波罗尼奥斯问题图表”），中文和英文缩写分别是：点点点（PPP）、点点线（LPP）、点线线（LLP）、点点圆（CPP）、线线线（LLL）、点线圆（CLP）、点圆圆（CCP）、线线圆（CLL）、线圆圆（CCL）、圆圆圆（CCC）见表 5-3-1 阿波罗尼奥斯问题图表。其中第十个问题（CCC）被认为最难，也最有代表性，阿波罗尼奥斯问题一般也仅指第十个问题。

表 5-3-1　阿波罗尼奥斯问题图表

序号	问题简称	缩写	最大解数	示意图
1	点点点	PPP	1	
2	点点线	LPP	2	
3	点线线	LLP	2	
4	点点圆	CPP	2	

续表

序号	问题简称	缩写	最大解数	示意图
5	线线线	LLL	4	
6	点线圆	CLP	4、∞	
7	点圆圆	CCP	4、∞	
8	线线圆	CLL	8	
9	线圆圆	CCL	8、∞	
10	圆圆圆	CCC	8、∞	

阿波罗尼奥斯在《论接触》中提出并解决了该问题，但作品已失传，具体解法后人无从得知，不过这件事被记载在一份四世纪时亚历山大的帕普斯所写的报告里。

法国数学家韦达在 1600 年出版的一本书中论述了阿波罗尼奥斯提出的问题，给出了十种情况的解，为了解决每一个特殊情形，韦达建立了许多辅助命题和引理。韦达运用了两个圆的位似中心，这可能最接近阿波罗尼奥斯的思想。但是，韦达可能对问题的解的个数并没有全面的认识。

1593 年，作为对比利时数学家罗曼努斯（A.Romanus，1561—1615）所提 45 次方程问题的回应，韦达向罗曼努斯提出了阿波罗尼奥斯问题。韦达对罗曼努斯用双曲线确定圆心的解法并不满意，由于解波罗尼奥斯问题只允许用尺规作图，因此他认为不可以用圆锥曲线来确定圆心。

后来牛顿用罗曼努斯的思路，成功将两条双曲线的交点化为可以用尺规作图作出的交点。和韦达一样，牛顿也没有讨论阿波罗尼奥斯问题的解的个数。

解析几何学建立以后，很多人便想在古老的阿波罗尼奥斯问题上初试牛刀。笛卡尔找到了两种解法，第一种非常复杂，以至于这位解析几何开山鼻祖也不能保证在一个月内完成作图。第二种方法虽然简单得多，但其复杂程度也足以让他望而却步。笛卡尔给出了平面四个相切圆（每个圆都与其他三个圆外切）的半径关系式，即笛卡尔定理：

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)$$

推广到 n 维的相切球的半径关系式为(k=1/r)：$\left(\sum_{i=1}^{n+2}k_i\right)^2=n\sum_{i=1}^{n+2}k_i^2$

1788 年，欧拉（L.Euler，1707—1783）和他的学生尼古拉.弗斯（N.Fuss，1755—1826）在《圣彼得堡科学学院院刊》上分别发表了代数解法，该解法相当于解一个三元二次方程。

19 世纪初，法国著名数学家庞斯列（J.V.Ponceler，1788—1867）创立了射影几何学，为解决几何问题提供了新方法。

蒙日（Monge）的学生卡诺（L.N.M.Carnot，1753—1823）于 1803 年概述了阿波罗尼奥斯问题的代数解法。德国数学家高斯（C.F.Gauss，1777—1855）完成了卡诺的代数解法，并成功对卡诺的计算进行了简化，这如同牛顿对罗曼努斯解法作出改进一样。

从韦达到庞斯列，尽管每位数学家给出的解法都有独到之处，但他们所讨论的都只是阿波罗尼奥斯问题的各种特殊情况。在新的时代，人们对问题的解提出更高的要求，韦达的分步解法已经不能为人们所接受，人们需要一种直接的解法，这种解法能够适用于韦达以及后来数学家们所考虑的所有特殊情形，并且对于每一种情形，能够确定解的个数。

阿波罗尼奥斯问题的第一个一般性解法是热尔岗(J.D.Gergonne，1771—1859）于 1816 年给出的，热尔岗用了分析法。热尔岗的解法思路简单，解法优美，很容易用尺规实现作图，具有代表性。

1822 年，庞斯列在其《圆形之射影性质》中给出了阿波罗尼奥斯问题的另一个解法，他运用的是综合法，与热尔岗的解法有异曲同工之妙。

70 年后，法国数学家福切（Maurice Fouche）应用等角圆方法再次解决了阿波罗尼奥斯问题，不过他的这一解法与庞斯列解法基本相同。值得注意的是，福切不仅给出问题的一般解，而且还根据已知三圆的位置关系，讨论了各种情况下解的个数，同时他的解法同样适用于已知圆被换成点或直线时的特殊情形。

19 世纪中叶，丹麦数学家彼得逊（J.Petersen，1839—1910）利用反演理论解决了阿波罗尼奥斯问题。

虽然问题已经得到圆满解决，但人们对它的兴趣却没有减弱，随着几何学的发展，一些新的解法不断地被发现，并且问题本身也在转化和推广。就在韦达给出阿波罗尼奥斯问题的解近一个世纪后，费马（P.de Fermat，1601—1665）就将问题推广到了三维空间：求作一球，使其与已知的四个球相切。

1921 年，诺贝尔化学奖获得者索迪（F.Soddy，1877—1956）于 1936 年在国际著名科学杂志《自然》上用诗歌的形式发表了三个圆两两相切时的解法，后来

称这种特殊情况为“Soddy 圆”，索迪称之为“精确之吻”，后来大家都管阿波罗尼奥斯问题为“圆之吻”。对于同一特殊情形，美国数学家艾普斯坦（D.Eppstein）于 2001 年由从空间两两相切的四球的一个性质中导出了一个十分美妙的新解法。现在人们还将阿波罗尼奥斯问题推广到更高维度去研究。

阿波罗尼奥斯圆不断迭代，还能得到所谓的“阿波罗尼奥斯垫片”，如图 5-4-1 ~ 图 5-4-3 所示，这是最早被印刷出来的分形图形，在解析数论中也能觅得它的踪影。

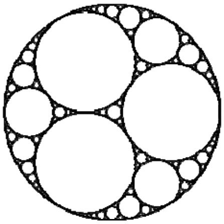


图 5-4-1

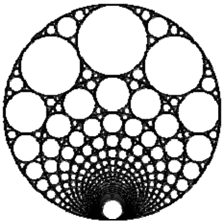


图 5-4-2

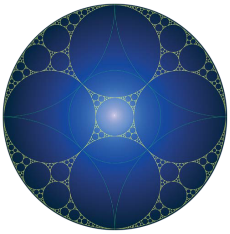


图 5-4-3

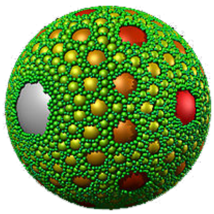


图 5-4-4

如图 5-4-1 ~ 图 5-4-3 所示是阿波罗尼奥斯垫片，如图 5-4-4 所示是阿波罗尼奥斯球，它们和谢尔宾斯基三角形和谢尔宾斯基地毯很像。这些数学模型在金融领域分析有一定应用。

阿波罗尼奥斯问题，这个历经 2000 多年的古老数学问题，在新的理论的研究下，还将继续焕发青春活力。

小注：

一般情况下，阿波罗尼奥斯问题的解的数量是有限的，少数特殊情况的解有无穷多个。例如，当三个圆相切时，符合问题要求的解圆有无穷多个，也就是说此时阿波罗尼奥斯问题的解的数量趋向无穷大。

阿波罗尼奥斯问题相同问题的条件

根据不同的图形元素，阿波罗尼奥斯问题可以分为 10 个种类（见“阿波罗尼奥斯问题图表”），每个种类的三个图形元素可以有若干不同的相对位置排列，所有不同的排列结构构成阿波罗尼奥斯问题的总数量。那么，对于具体的两个排列，如何判断是相同的排列，或者称为相同的问题呢？

相同问题必须具备下面三个条件：

（1）相同问题的三个图形元素一样。

例如，两个问题都是由线、圆、圆构成的，那么这两个问题的图形元素相同。

（2）相同问题的空间拓扑结构一样。

例如，如图 5-4-5 所示两个图形的空间拓扑空间结构相同。

（3）相同问题的解一样。

根据第三条可以判定如图 5-4-5 所示两个图形是不同的排列，即两个不同的问题。左右两个图形虽然都是三个解，但左边的图形两个解圆经过切点，右边图形只有一个解圆经过切点。

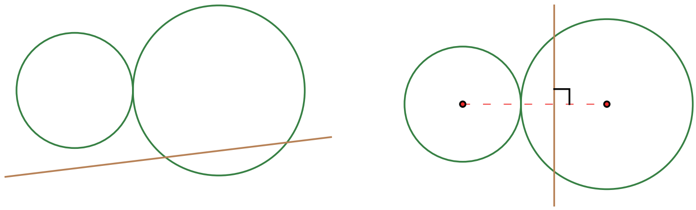


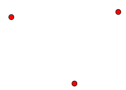
图 5-4-5

很多资料计算问题的总数时，只考虑不同拓扑结构的图形，未考虑相同拓扑结构但解不同的图形，这是错误的。

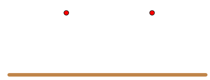
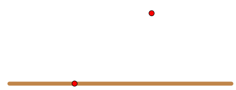
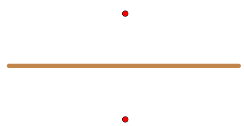
阿波罗尼奥斯问题全排列

1）点点点（2个）

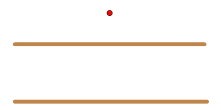
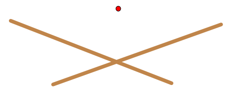
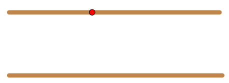
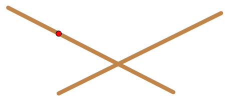
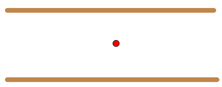
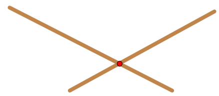
两个问题分别是三点共线和非共线两种情况。

序号	问题
1	
2	

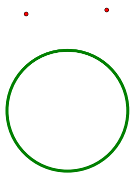
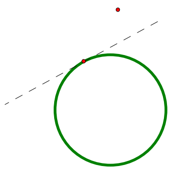
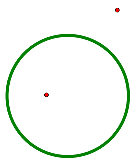
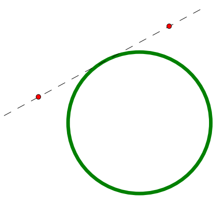
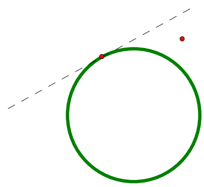
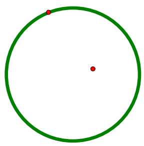
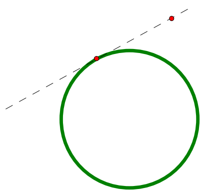
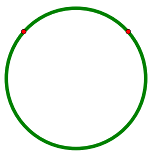
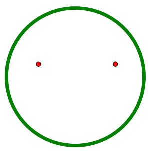
2）点点线（4个）

序号	问题
1	
2	
3	
4	

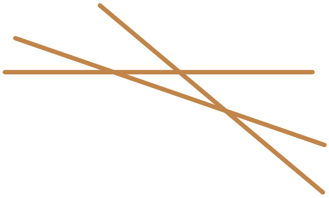
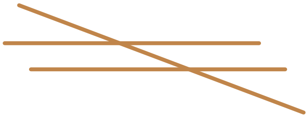
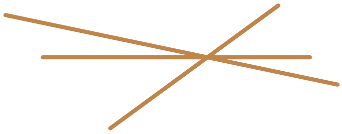
3）点线线（6个）

序号	问题	序号	问题
1		4	
2		5	
3		6	

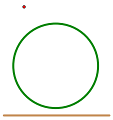
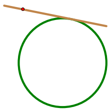
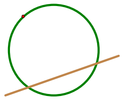
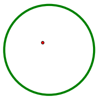
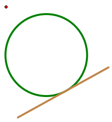
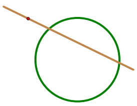
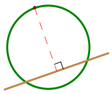
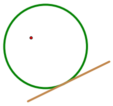
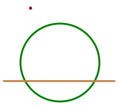
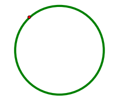
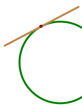
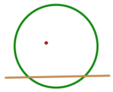
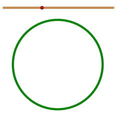
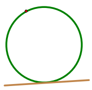
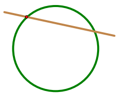
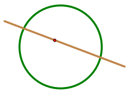
4）点点圆（9个）

序号	问题	序号	问题	序号	问题
1		4		7	
2		5		8	
3		6		9	

5）线线线（4 个）

序号	问题	序号	问题
1		3	
2		4	

6）点线圆（16 个）

序号	问题	序号	问题	序号	问题	序号	问题
1		5		9		13	
2		6		10		14	
3		7		11		15	
4		8		12		16	

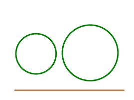
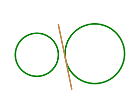
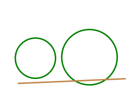
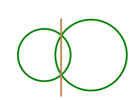
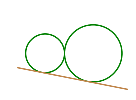
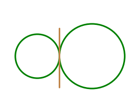
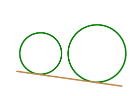
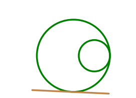
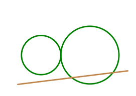
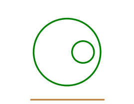
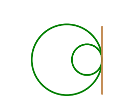
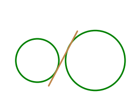
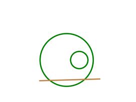
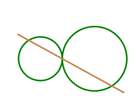
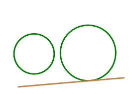
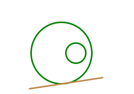
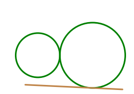
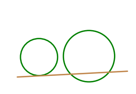
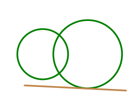
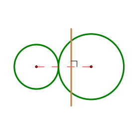
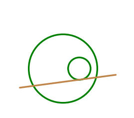
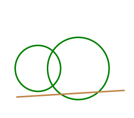
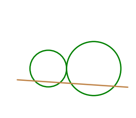
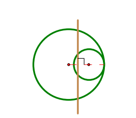
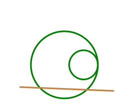
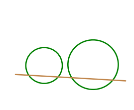
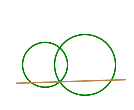
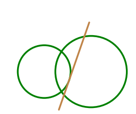
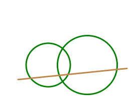
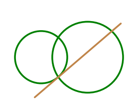
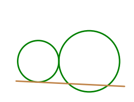
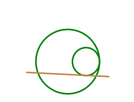
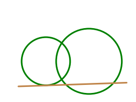
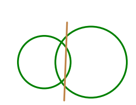
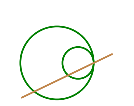
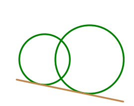
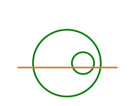
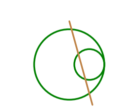
7）点圆圆（43个）

序号	问题	序号	问题	序号	问题	序号	问题	序号	问题	序号	问题
1		5		9		13		17		21	
2		6		10		14		18		22	
3		7		11		15		19		23	
4		8		12		16		20		24	
25		29		33		37		41			
26		30		34		38		42			
27		31		35		39		43			
28		32		36		40					

8）线线圆（17个）

序号	问题	序号	问题	序号	问题	序号	问题	序号	问题
1		5		9		13		17	
2		6		10		14			
3		7		11		15			
4		8		12		16			

9）线圆圆（39个）

序号	问题	序号	问题	序号	问题	序号	问题	序号	问题
1		9		17		25		33	
2		10		18		26		34	
3		11		19		27		35	
4		12		20		28		36	
5		13		21		29		37	
6		14		22		30		38	
7		15		23		31		39	
8		16		24		32			

“线圆圆”问题统计：

问题编号	图形交点数量	问题数量
1～3	0	3
4～8	1	5
9～15	2	7
16～25	3	10
26～32	4	7
33～37	5	5
38～39	6	2

10）圆圆圆

“圆圆圆”的情况比较复杂，不同的拓扑结构就有 49 个，再考虑拓扑结构一样，但解不一样的排列，数量更庞大，下面先列出不同的拓扑结构问题。

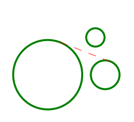
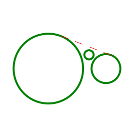
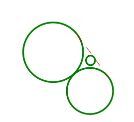
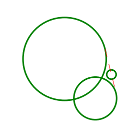
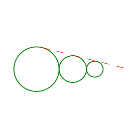
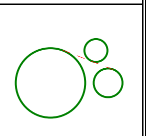
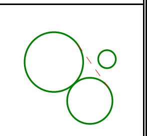
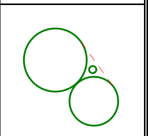
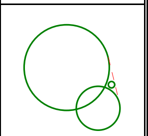
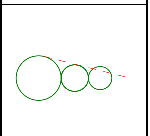
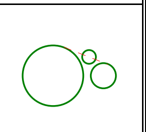
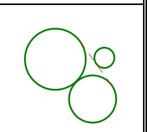
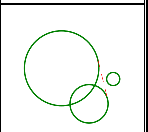
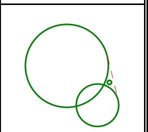
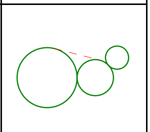
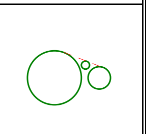
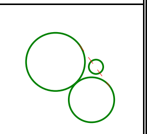
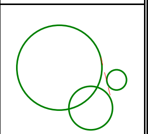
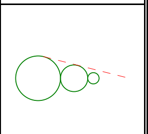
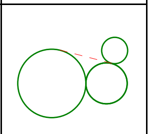
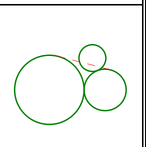
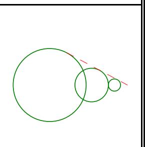
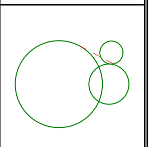
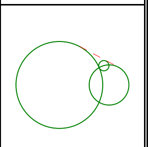
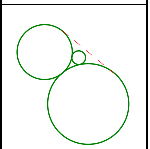
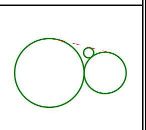
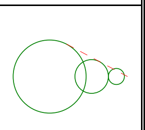
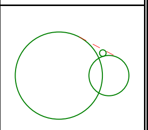
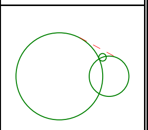
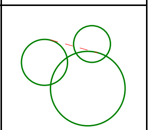
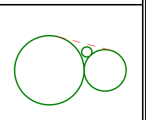
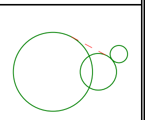
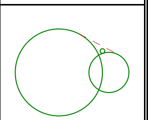
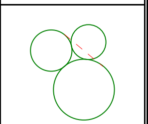
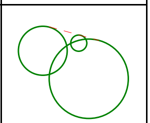
圆圆圆（不同拓扑结构 49 个）

序号	问题	序号	问题	序号	问题	序号	问题	序号	问题
1		11		21		31		41	
2		12		22		32		42	
3		13		23		33		43	
4		14		24		34		44	
5		15		25		35		45	
6		16		26		36		46	
7		17		27		37		47	
8		18		28		38		48	
9		19		29		39		49	
10		20		30		40			

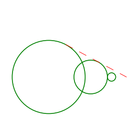
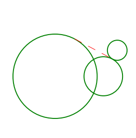
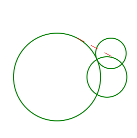
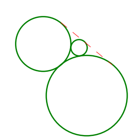
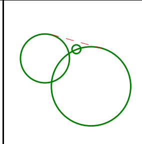
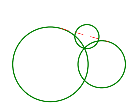
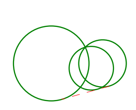
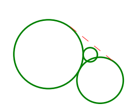
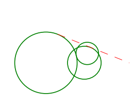
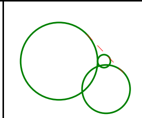
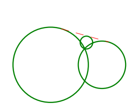
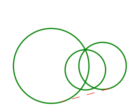
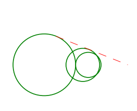
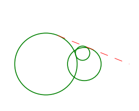
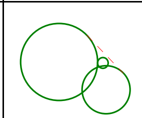
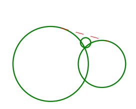
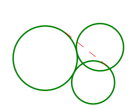
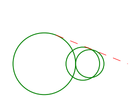
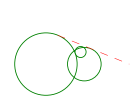
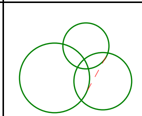
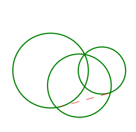
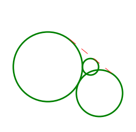
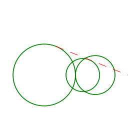
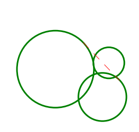
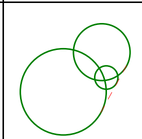
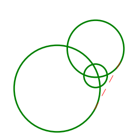
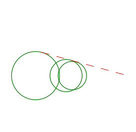
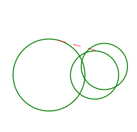
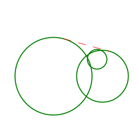
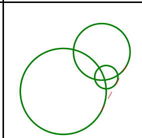
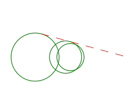
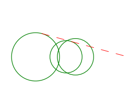
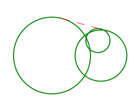
"圆圆圆"问题统计：

问题编号	图形交点数量	问题数量
1～4	0	4
5～13	1	9
14～23	2	10
24～32	3	9
33～41	4	9
42～45	5	4
46～49	6	4

说明：上面 49 个问题，只是拓扑结构不同的排列，未考虑拓扑相同而解不同的情况。还可以进一步分解的有第 1、5、14、15、24、27、32、33、37、40、41、42、43、46、48 号共 15 个图形，下面对这些图形再进行分解。

序号	问题	序号	问题	序号	问题	序号	问题	序号	问题
1 1 1		5 1 5		9 5 4		13 14 3		17 15 2	
2 1 2		6 5 1		10 5 5		14 14 4		18 15 3	
3 1 3		7 5 2		11 14 1		15 14 5		19 15 4	
4 1 4		8 5 3		12 14 2		16 15 1		20 15 5	
21 15 6		25 24 2		29 24 6		33 27 2		37 32 3	
22 15 7		26 24 3		30 24 7		34 27 3		38 33 1	
23 15 8		27 24 4		31 24 8		35 32 1		39 33 2	

续表

序号	问题	序号	问题	序号	问题	序号	问题	序号	问题
24 24 1		28 24 5		32 27 1		36 32 2		40 33 3	
41 37 1		45 40 2		49 41 3		53 42 4		57 43 2	
42 37 2		46 40 3		50 42 1		54 42 5		58 43 3	
43 37 3		47 41 1		51 42 2		55 42 6		59 46 1	
44 40 1		48 41 2		52 42 3		56 43 1		60 46 2	
61 46 3		63 48 2		65 48 4		67 48 6			
62 48 1		64 48 3		66 48 5					

阿波罗尼奥斯问题统计

序号	问题	不同拓扑结构数量	不同问题数量
1	点点点	1	2
2	点点线	4	4
3	点线线	6	6
4	点点圆	6	9
5	线线线	4	4
6	点线圆	15	16
7	点圆圆	24	43
8	线线圆	17	17
9	线圆圆	37	39
10	圆圆圆	49	101
总数		163	241

阿波罗尼奥斯问题尺规作图

由于阿波罗尼奥斯问题数量庞大，很难做到对每一个问题进行一一讲解。这里仅对 10 个问题种类的每一个挑选一些比较有代表性的问题进行讲解，其余情况解法与代表性问题的解题原理差不多。

1）点点点

已知 A、B、C 三点，尺规作图求作一圆过这三点。

说明：一般情况下，问题只有一个解。

作法：

（1）连结 AB、AC，如图 5-4-6 所示。

（2）作出 AB 的中点 D；AC 的中点 E。

（3）过 D 点作 AB 的垂线；过 E 点作 AC 的垂线；两条垂线的交点为 O，则 O 点即为所求圆的圆心，作出该圆。

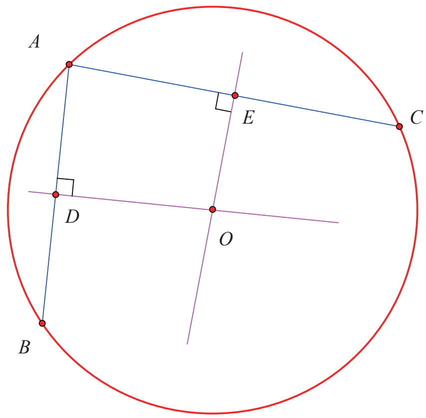


图 5-4-6

2）点点线

已知 A、B 两点和直线 i，尺规作图求作一圆过 A、B 两点且与 i 相切。

解法一：

说明：一般情况下，问题有两个解。若 A、B 连线与已知直线平行的情况比较简单，在此不讨论。

原理：$FD^2=DG^2=BD \cdot DA$。

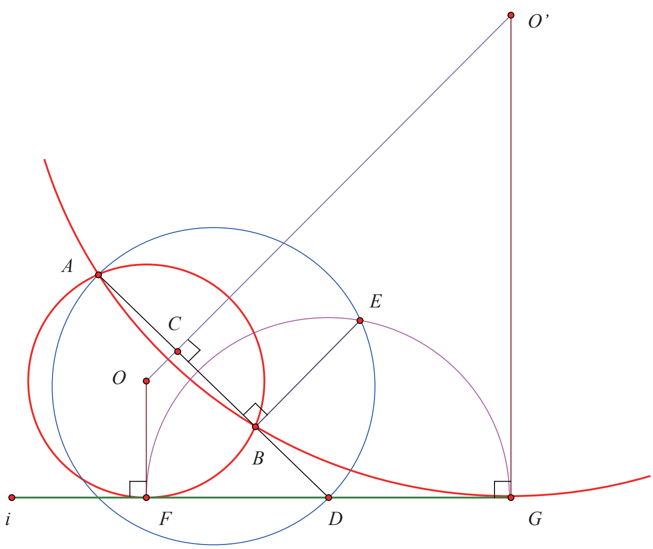


图 5-4-7

作法：

（1）作出 AB 的中点 C，如图 5-4-7 所示。

（2）作直线 AB，交已知直线 i 于 D 点。

（3）过 B 点作 AD 的垂线 BE。

（4）以 AD 为直径作一圆，交 BE 于 E 点。

（5）以 D 点为圆心，ED 为半径作弧，交 i 于 F、G 两点（则 F、G 为切点）。

（6）分别过 F、G 点作 FG 的垂线；过 C

点作 AB 的垂线，与 F、G 点的垂线交于 O、O'两点，则 O、O'为所求圆的圆心，作出这两个圆。

解法二：

作法：

（1）任作一过 A、B 两点的圆⊙O，如图 5-4-8 所示。

（2）作直线 AB，交 i 于 C 点。

（3）过 C 点作⊙O 的切线 CD。

（4）以 C 点为圆心，CD 为半径作圆，交 i 于 E、F 两点，则过 A、B、E 三点的圆为一个解；过 A、B、F 三点的圆为另一个解。

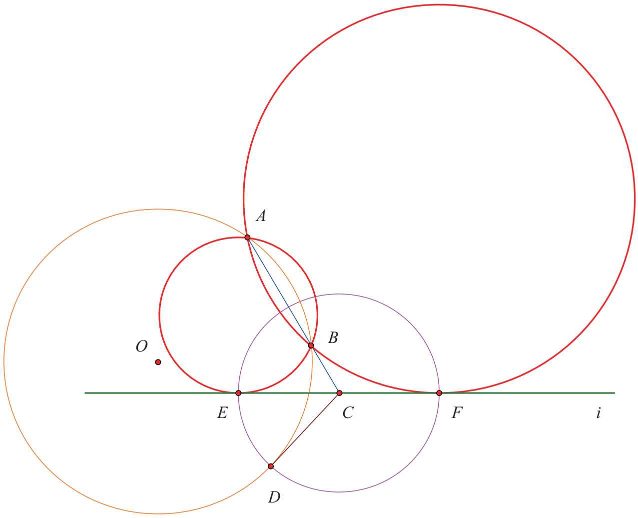


图 5-4-8

解法三：

作法：

（1）过 A 点任作一圆，以 A 点为反演极，以⊙A 为反演圆。

（2）作出 B 点的反演点 B'。

（3）作出直线 i 的反演图形，为一个圆。

（4）过 B'点作直线 i 反演图形圆的两条切线。

（5）作两条切线的反演图形，是两个圆，则这两个圆即为所求作的圆。

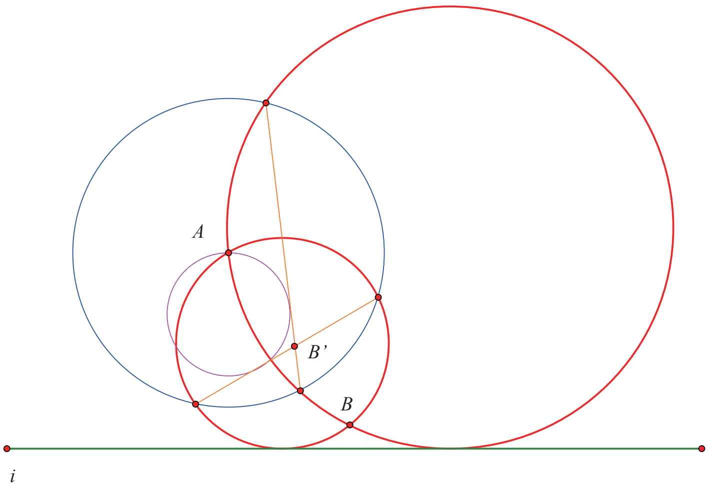


图 5-4-9

解法四：

作法：

（1）作出 AB 的中垂线，交 i 于 C 点，如图 5-4-10 所示。

（2）作直线 CA。

（3）过 B 点作 i 的垂线，垂足为 D 点，交 AB 的中垂线于 O 点。

（4）以 O 点为圆心，OD 为半径作圆，交 AC 于 E、F 两点。

（5）连结 OE、OF。

（6）过 A 点作 OE、OF 的平行线，交 AB 的中垂线于 G、H 两点，则 G、H 分别为所求圆的两个圆心，作出两个圆。

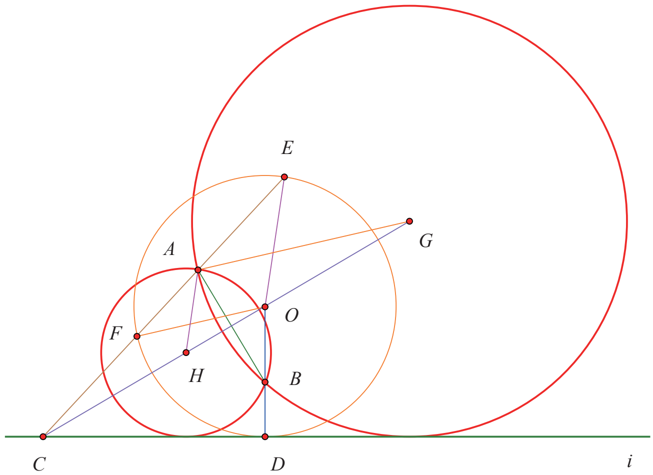


图 5-4-10

3）点线线

已知点 A 及 i、j 两条直线，尺规作图求作一圆过 A 点，且与 i、j 相切。

解法一：

说明：一般情况下，问题有两个解。

作法：

（1）作出 i、j 的交点 P，如图 5-4-11 所示。

（2）作出 $\angle P$ 的角平分线，在角平分线上任取一点 B。

（3）过 B 点作 i 的垂线，垂足为 C。

（4）以 B 点为圆心，BC 为半径作圆。

（5）连结 AP，交 $\odot B$ 于 D、E 两点。

（6）过点 A 作 $AO /\!/ BD$，交角平分线于 O 点；过点 A 作 $AO' /\!/ BE$，交角平分线于 O' 点，则 O、O' 为所求圆的圆心，作出两个圆。

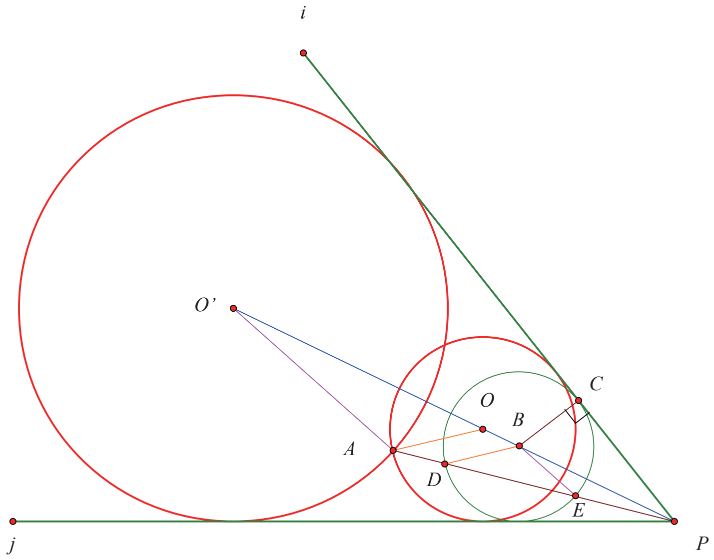


图 5-4-11

解法二：

作法：

（1）作出两直线的角平分线，如图 5-4-12 所示。

（2）过 A 点作角平分线的垂线，垂足为 C 点，交其中一条直线于 D 点；作出 A 点关于角平分线的对称点 B。

（3）以 C 点为圆心，CA 为半径作圆。

（4）过 D 点作⊙C 的切线，切点为 E。

（5）以 D 点为圆心，DE 为半径作圆，交直线于 F、G 两点。

则过 F、A、B 三点的圆为一个解；过 G、A、B 三点的圆为另一个解。

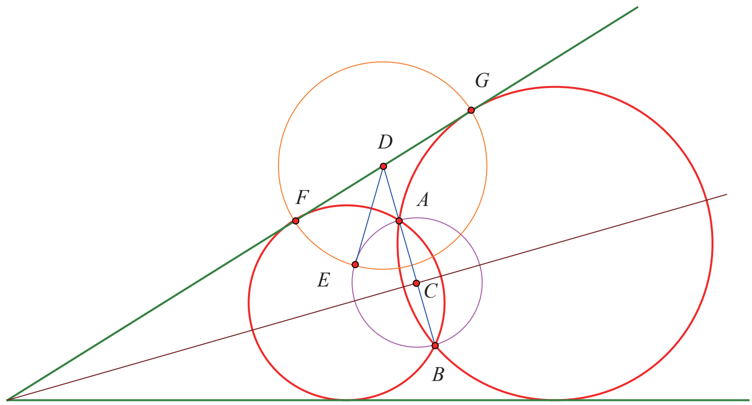


图 5-4-12

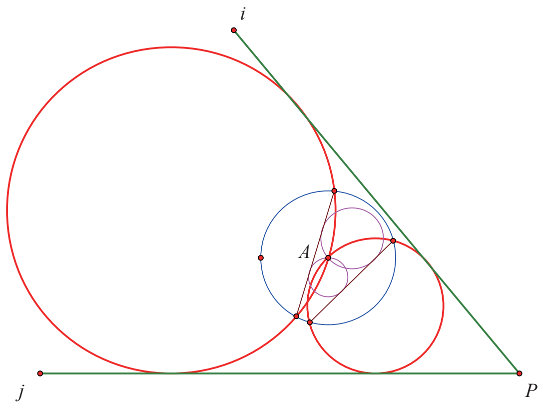


图 5-4-13

解法三：

作法：

（1）以 A 点为圆心，任意半径作圆，以 A 点为反演极，⊙A 为反演基圆，如图 5-4-13 所示。

（2）分别作出 i、j 的反演图形，为两个圆。

（3）分别作出两个反演圆的外公切线。

（4）分别作出两条外公切线的反演图形，这两个反演图形是两个圆，即为问题所求作的圆。

作出的公切线只有两条外公切线，没有内公切线，所以题目的解有两个。

4）点点圆

解法一：

已知 A、B 两点及⊙O，尺规作图求作一圆过 A、B 两点，且与⊙O 相切。

说明：一般情况下，问题有两个解。

原理：$HK^2=HJ^2=HG\cdot HF=HA\cdot HB$。

作法：

（1）作出 AB 的中点 D，如图 5-4-14 所示。

（2）过 D 点作 AB 的垂线，在垂线上任取一点 E。

（3）以 E 点为圆心，EA 为半径作圆，交⊙O 于 F、G 两点。

（4）作直线 FG、AB，交点为 H。

（5）以 HO 为直径的圆交⊙O 于 J、K 两点。

（6）过 J、A、B 三点的圆为其中一个解；过 K、A、B 三点的圆为另一个解。

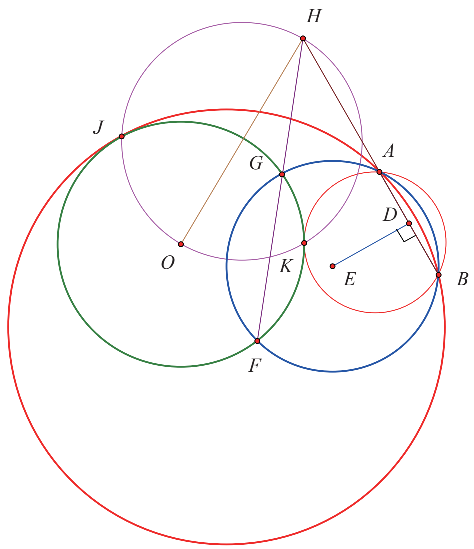


图 5-4-14

解法二：

作法：

（1）过 A 点任作一圆，以 A 点为反演中心，⊙A 为反演圆。

（2）作出 B 点的反演点 B'。

（3）作出⊙O 的反演图形，为一个圆。

（4）过 B' 作⊙O 反演圆的两条切线。

（5）作出两条切线的反演图形，为两个圆，则这两个圆为题目所求作圆。

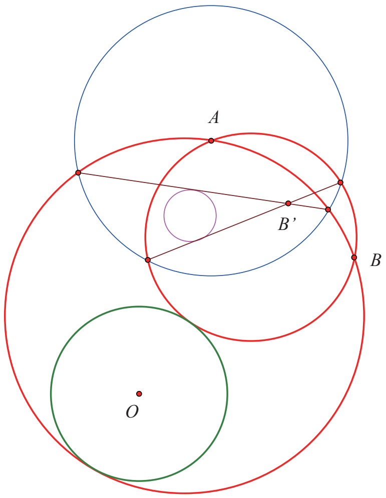


图 5-4-15

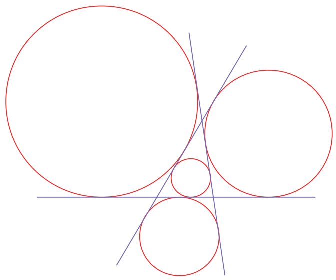


图 5-4-16

5）线线线

已知三条相交直线，三条直线不共点，尺规作图求作一圆与这三条直线相切。

说明：一般情况下，问题有 4 个解。

作法：四个圆的圆心为三条直线相交形成三角形的内心和三个旁心，用角平分线反复相交可得，如图 5-4-16 所示，具体过程略。

6）点线圆

解法一：

已知点 A、⊙B、直线 i，尺规作图求作一圆过 A 点，并且与 i 和⊙B 相切。

说明：一般情况下，问题有四个解。

外切圆作法：

（1）过 B 点作 i 的垂线，交 i 于 C 点，交⊙B 于 D、E 两点，如图 5-4-17 所示。

（2）作直线 DA，交 i 于 G 点。

（3）作 $\angle DEF=\angle DAC$，点 F 在 DA 上。

至此，问题变成了求作圆过 A、F 两点且与 i 直线相切的点点线问题。

（4）作出 AF 的中点 H。

（5）以 H 点为圆心，FH 为半径作圆。

（6）以 HG 为直径的圆交⊙H 于 J 点。

（7）以 G 点为圆心，GJ 为半径作圆，交 CG 于 K、L 两点。

（8）分别过 K、L 点作 CG 的垂线。

（9）过 H 点作 AF 的垂线，交过 K、L 点的两条垂线于 O、O'两点，则 O、O'为所求圆的两个圆心，⊙O、⊙O'与⊙B 外切，作出这两个圆。

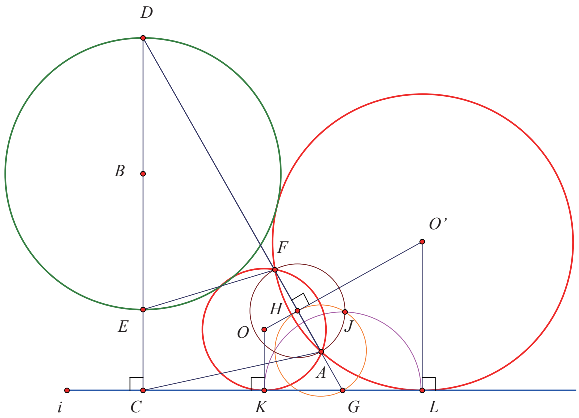


图 5-4-17

内切圆作法：

（1）过 B 点作直线 i 的垂线，交 i 于 C 点，交⊙B 于 D、E 两点，如图 5-4-18 所示。

（2）连结 AE。

（3）作直线 AD，交直线 i 于 G 点。

（4）作∠FCE=∠FAE，交 AD 为 F 点。

则问题变成了求作圆过 A、F 两点且与直线 i 相切的点点线问题。

（5）作出 AF 的中点 H。

（6）以 HG 为直径的圆交⊙H 于 J 点。

（7）以 G 点为圆心，GJ 为半径作圆，交 CG 于 K、L 两点（则 K、L 为切点）。

（8）分别过 K、L 作 CG 的垂线。

（9）过 H 点作 AF 的垂线，交过 K、L 的两条垂线于 O、O'两点，则 O、O'为所求圆的圆心，作出两个圆。

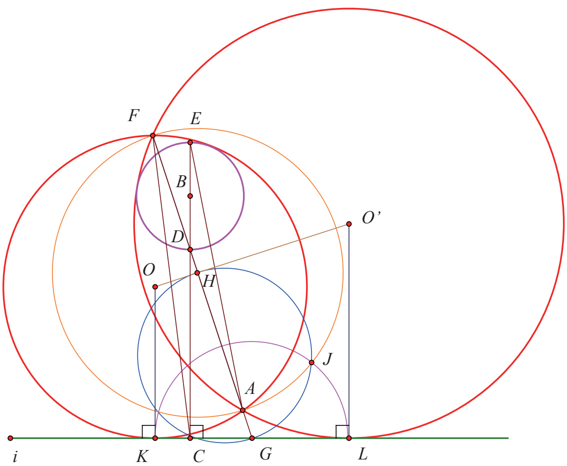


图 5-4-18

解法二：

已知⊙O、直线 BC 和点 A，求作一圆过点 A，并且与 BC 和⊙O 相切。

作法：

（1）过 O 点作 BC 的垂线，交⊙O 于 D、E 两点，交 BC 于 F 点，如图 5-4-19 所示。

（2）作直线 AD。

（3）过 A、E、F 三点作圆，交 AD 于 G 点。

至此，问题变成求作一圆过 A、G 两点，且与⊙O 相切的圆（点点圆）问题。余下作图参考“点点圆”作图。

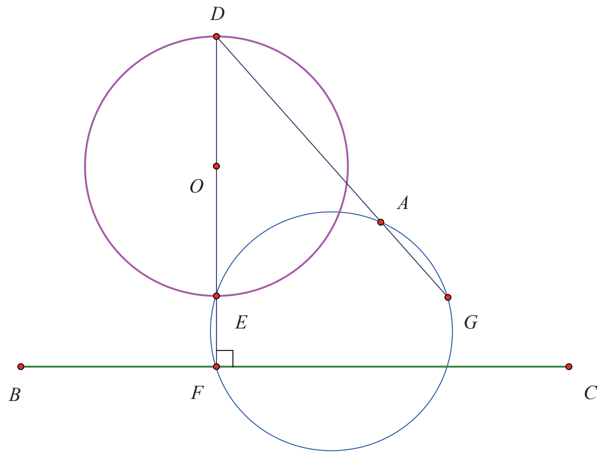


图 5-4-19

解法三：

已知点 A、⊙O 和直线 CD，求作一圆过 A 点，并且与⊙O 和直线 CD 相切。

作法：

（1）过 A 点任作一圆，以 A 点为反演中心，⊙A 为反演基圆。

（2）作出直线 CD 的反演图形。

（3）作出⊙O 的反演图形。

（4）两个反演图形都是圆，作出两个圆的公切线。

（5）作出公切线的反演图形，即为所求作的圆。

显然，公切线的数量可能有 0、1、2、3、4，公切线有几

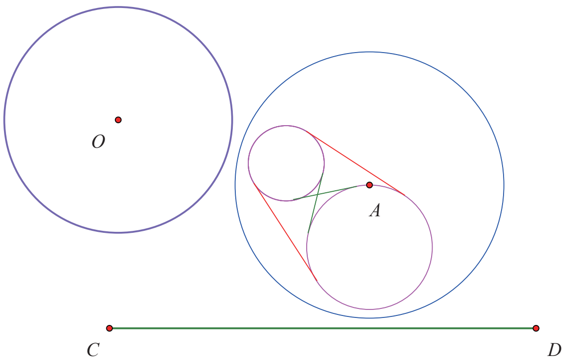


图 5-4-20

条，对应的解就有几个。

7）点圆圆

解法一：

已知⊙A、⊙B 和点 C，尺规作图求作一圆过 C 点，且与⊙A 和⊙B 相切。

说明：一般情况下，问题有四个解。

同时内切、外切作法：

（1）作直线 AB，交⊙A 于 D 点，交⊙B 于 E，如图 5-4-21 所示。

（2）作出⊙A 和⊙B 的外位似中心 F 点（两条外公切线交点）。

（3）作直线 FC。

（4）过 D、E、C 三点的圆与 FC 交于 G 点，与⊙A 交于 H 点。

至此，问题变成求作圆过 C、G 两点且与⊙A 相切（点点圆）。

（5）作 DH 直线，交 CF 于 J 点。

（6）以 AJ 为直径的圆交⊙A 于 K、L 两点。

（7）过 K、C、G 三点的圆同时内切于⊙A 和⊙B；过 L、C、G 三点的圆同时外切于⊙A 和⊙B；作出这两个圆。

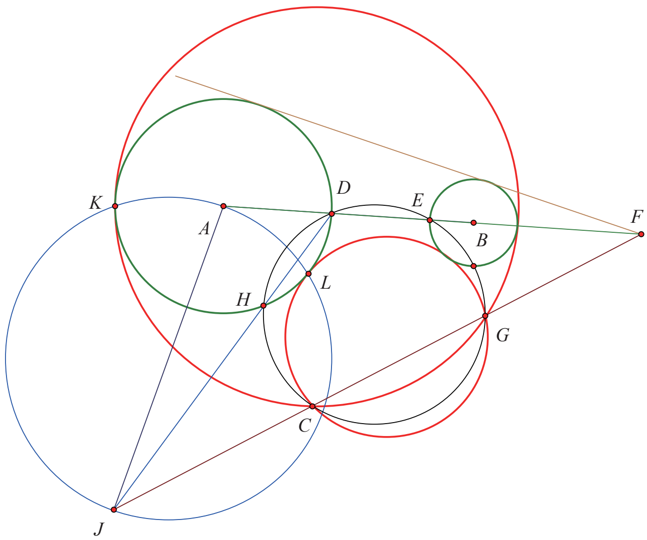


图 5-4-21

一内切、一外切作法：

（1）作直线 AB，交⊙A 于 D 点，交⊙B 于 E 点，如图 5-4-22 所示。

（2）作出两圆的内位似中心 F（内公切线交点）。

（3）作直线 CF。

（4）过 C、D、E 三点的圆交 CF 于 G，交⊙A 于 H 点。

至此，问题变成求作圆过 C、G 两点，且与⊙A 相切（点点圆）。

（5）作直线 DH，交 CF 于 J 点。

（6）以 AJ 为直径的圆交⊙A 于 K、L 两点。

（7）过 K、C、G 三点的圆同时与⊙A 和⊙B 相切；过 L、C、G 三点的圆同时与⊙A 和⊙B 相切，作出这两个圆。

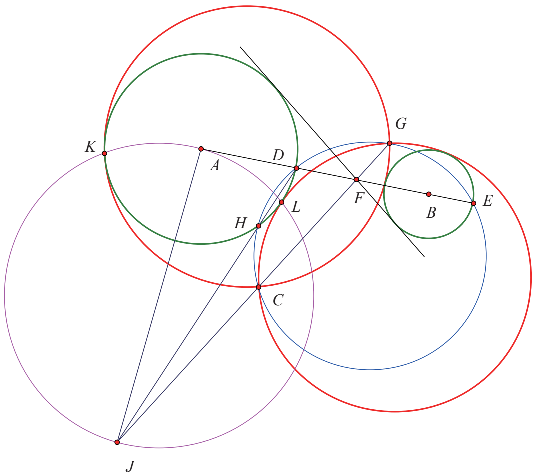


图 5-4-22

解法二：

已知点 P 和⊙A、⊙B，求作一圆过点 P，并且和⊙A、⊙B 相切。

作法：

（1）过 P 点任作一圆，以 P 为反演中心，⊙P 为反演基圆，如图 5-4-23 所示。

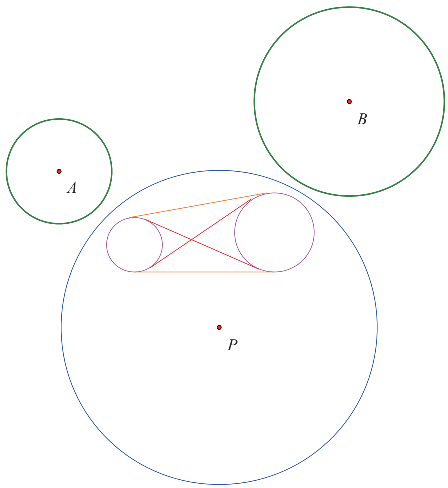


图 5-4-23

（2）分别作出⊙A、⊙B 的反演图形，为两个圆。

（3）作出⊙A、⊙B 反演圆的公切线。

（4）作出公切线的反演图形，即为题目所求作的圆。

显然，公切线的数量可能为 0、1、2、3、4，公切线有几条，对应的解就有几个。

8）线线圆

解法一：

解圆外切

已知直线 i、j 及⊙A，尺规作图求作一圆与直线 i、j 和⊙A 都相切。

外切作法：

（1）作两条直线，分别平行于 i、j 直线，并且与 i、j 直线的距离等于⊙A 的半径，交点为 B，如图 5-4-24 所示。

（2）过 B 点作角平分线，并在角平分线上任取一点 C。

（3）以 C 点为圆心，作一任意圆，要求与第（1）步作出的直线相切。

（4）连结 AB，交⊙C 于 D、E 两点。

（5）连结 CD、CE。

（6）过 A 点分别作 CE、DC 的平行线，与角平分线 BC 交于 F、G 两点。

（7）F、G 分别为所求圆的两个圆心，作出两个圆。

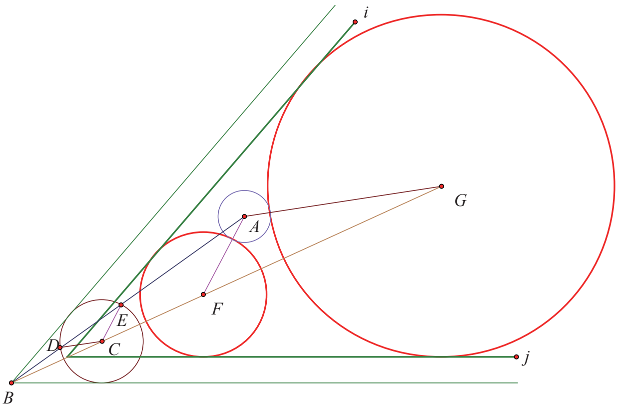


图 5-4-24

解圆内切

已知直线 i、j 及⊙A，尺规作图求作一圆与直线 i、j 和⊙A 都相切。

说明：只有已知圆与两条已知直线都相交的情况下，当直线交点不在圆内时，外切圆六个解，内切圆两个解，共八个；当直线交点在圆内时，内切和外切各四个解，也是八个。

其余情况均没那么多解，这里仅以四个解为例。

内切作法：

（1）作两条直线，分别与直线 i、j 平行，并且与 i、j 直线的距离等于⊙A 半径，交点为 B，如图 5-4-25 所示。

（2）过 B 点作角平分线，并在其上任取一点 C。

（3）以 C 点为圆心作一任意圆，要求与第（1）步作出的两直线相切。

（4）连结 AB，交⊙C 于 D、E 两点。

（5）连结 CD、CE。

（6）过 A 点分别作 CD、CE 的平行线，与角平分线 BC 的交点为 F、G 两点。

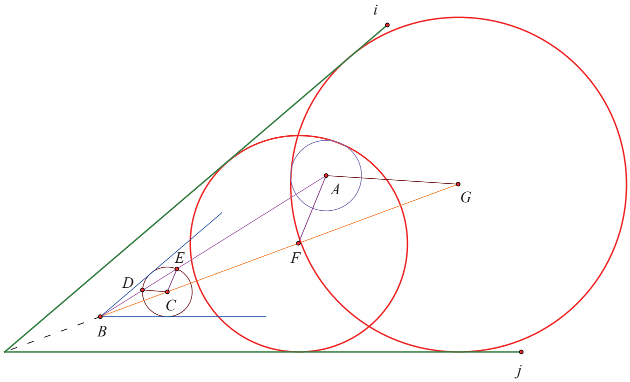


图 5-4-25

（7）F、G 为所求圆的两个圆心，作出两个圆。

给定图形两线交点在圆内

已知直线 i、j 和⊙A，i 和 j 的交点在⊙A 内，尺规作图求作一圆和直线 i、j 以及⊙A 都相切。

说明：直线交点在圆内和直线交点在圆外的情况作法差不多。

作法：

（1）分别作直线 i、j 的平行线，新作的平行线与原线的距离均等于⊙A 半径长，得到 B、C 两个交点，如图 5-4-26 所示。

（2）在角平分线上找到任意点 D、E。

（3）分别以 D、E 为圆心，各作一个任意圆，要求与新作的平行线相切。

（4）连结 AB，与⊙D 的交点只取 F 点。作直线 AC，与⊙E 的交点只取 G 点。

（5）过 A 点分别作 EG、FD 的平行线，与角平分线的交点为 O 和 O'，则这就是所求圆的两个圆心，⊙O 与⊙A 内切，⊙O'与⊙A 外切。作出⊙O 和⊙O'。

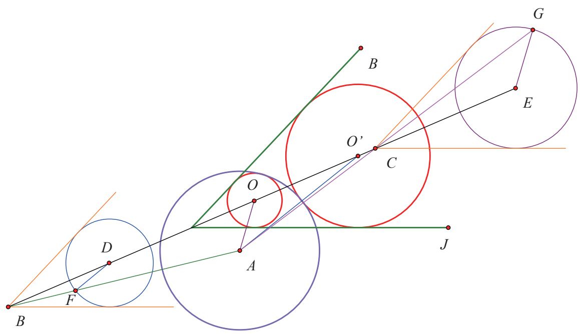


图 5-4-26

解法二：

已知⊙O、直线 AB、BC，求作一圆与⊙O、AB、BC 都相切。

作法：

（1）分别作直线 AB、BC 的平行线 $A'B'$、$B'C'$，与 AB、BC 的距离等于⊙O 的半径，如图 5-4-27 所示。

问题变成求作一圆过 O 点，并且和 $A'B'$、$B'C'$相切的圆（点线线）问题。具体作法参照点线线反演解法。

（2）将所作圆圆心位置不变，半径长缩小为⊙O 的半径，即为所求作的圆。

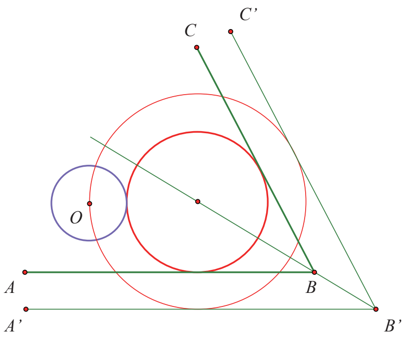


图 5-4-27

9）线圆圆

已知⊙A、⊙B 和直线 i，尺规作图求作一圆与直线 i 和⊙A、⊙B 都相切。

说明：一般情况下，问题有八个解。

作法：（假设 A 的半径为 R，⊙B 的半径为 r，并且 $R>r$）

（1）作一直线 j 与直线 i 平行，两直线的距离为 r，如图 5-4-28 所示。

（2）以 A 点为圆心，$R-r$（⊙A 与⊙B 半径之差）长为半径作圆，记为⊙C。

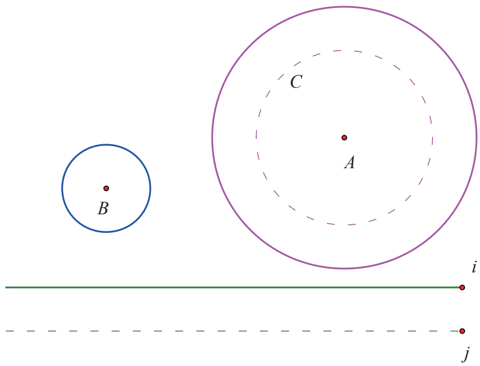


图 5-4-28

问题就变成：求作一圆过 B 点且和⊙C 和直线 j 相切（点线圆），有四个解。

不过这些作出的圆还要将半径缩短 r 长度，圆心也需要在直线 j 垂直方向上偏移 r 长度，才能作为最后解。

与 i 距离 r 长度的平行线共有两条，给定每一条都有四个解，所以问题总共有八个解。

转换成点线圆问题后，也可以用反演法解，具体解法参照点线圆反演解法。

10）圆圆圆

已知平面上有三个圆，⊙A、⊙B 和⊙C，求作圆和这三个已知圆都相切。

解法一：韦达解法

作法：

（1）假设半径的大小关系为⊙A>⊙B>⊙C，以 A 点为圆心，⊙A 半径减去⊙C 半径长为半径作圆，称作“小⊙A”；

以 B 点为圆心，⊙B 半径减去⊙C 半径长为半径作圆，称作“小⊙B”，如

图 5-4-29 所示。

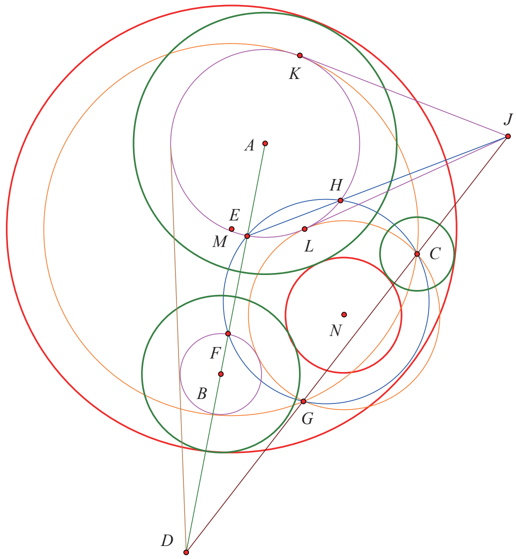


图 5-4-29

问题变成求作一圆，过 C 点，并且和小⊙A、小⊙B 都相切（点圆圆）问题。

（2）作出小⊙A、小⊙B 的外位似中心 D 点。

（3）作直线 AB，交小⊙A 于 E 点，交小⊙B 于 F 点。

（4）作直线 CD。

（5）过 E、F、C 三点作圆，交 CD 于 G 点。

（6）在 CG 的垂直平分线上任取一点为圆心，以该点到点 C 的长度为半径作圆（这里不重新作圆，仍旧选取过 E、F、C 三点的圆），交小⊙A 于 H 点。

（7）作直线 EH，交 CD 于 J 点。

（8）过 J 点作小⊙A 的两条切线，切点为 K、L。

（9）过 K、G、C 三点的圆的圆心 M 为所求圆的圆心；过 L、G、C 三点的圆的圆心 N 为所求圆的另一个圆心。三个已知圆既有内切又有外切的情况，作法与此类似。

解法二：热尔岗解法

同时外切内切作法：

（1）作出三个圆的三个外位似中心 D、E、F（作出两个即可），如图 5-4-30 所示。

（2）作出直线 DE，则 DE 为三个圆的外位似轴。

（3）作出三个圆的根心 G（也叫等幂心，每两个圆作出一条根轴，三条根轴交于一点，该点即为根心）。

（4）以外位似轴 DF 为极线，分别以⊙A、⊙B、⊙C 为反演圆，求出极线

的三个极点 J、K、L（以⊙A 为例：过 A 点作 DE 的垂线，作出垂足的反演点即为 J 点）。

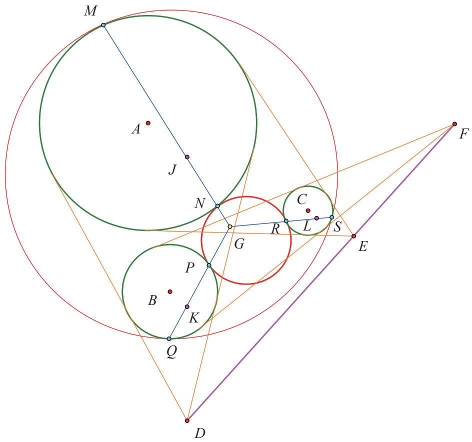


图 5-4-30

（5）作直线 GJ，交⊙A 于 M、N 两点；作直线 GK，交⊙B 于 P、Q 两点；作直线 GL，交⊙C 于 R、S 两点。

（6）过 M、Q、S 三点的圆为其中一个解；过 N、P、R 三点的圆为另一个解。

外切内切作法：

（1）作出⊙A、⊙B 的外位似中心 D；作出⊙B、⊙C 的内位似中心 E；作出⊙A、⊙C 的内位似中心 F；（D、E、F 三点只要作出两点即可），如图 5-4-31 所示。

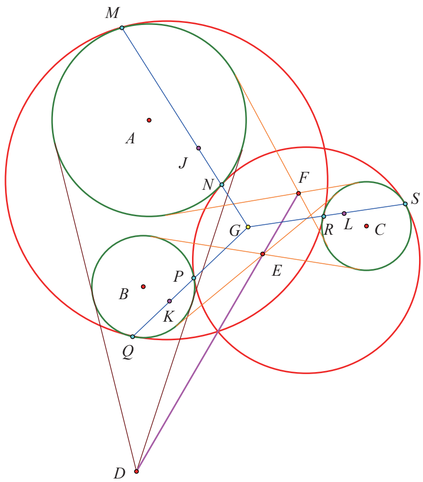


图 5-4-31

（2）作出直线 DE，则 DE 为三个圆的内位似轴。

（3）作出三个圆的根心 G。

（4）以内位似轴 DF 为极线，分别以⊙A、⊙B、⊙C 为反演圆，求出极线的三个极点 J、K、L。

（5）作直线 GJ，交⊙A 于 M、N 两点；作直线 GK，交⊙B 于 P、Q 两点；作直线 GL，交⊙C 于 R、S 两点。

（6）过 M、Q、R 三点的圆为其中一个解；过 N、P、S 三点的圆为另一个解。另外三条内位似轴作法与此相同。

三个圆一般有三条内位似轴，得到 6 个解，一条外位似轴得到 2 个解，一般情况下，阿波罗尼奥斯问题有 8 个解。

解法三：莫海亮解法

原理：

（1）作出三个圆的三个外位似中心 D、E、F，如图 5-4-32 所示。

（2）过 D 点任作一直线同时与⊙A、⊙B 相交，选取一对逆位似点 G、H 两点。

（3）连结 HF，与⊙C 有两个交点，选取 H 点的逆位似点 J。

（4）作直线 EJ，与⊙A 有两个交点，选取 J 点的逆位似点 K。

（5）作直线 KG，与外位似轴 DF 交于 L 点。

（6）过 L 点作⊙A 的两条切线，切点为 M、N。于是，同时与⊙A、⊙B、⊙C 内切的圆必过 M 点，并且 M 点为切点。同时与⊙A、⊙B、⊙C 外切的圆必过 N 点，并且 N 点为切点。重复上面作图三次可以作出所有切点，作出所求的圆；或者作图两次后，就可以根据两个切点求出圆心，完成作图。

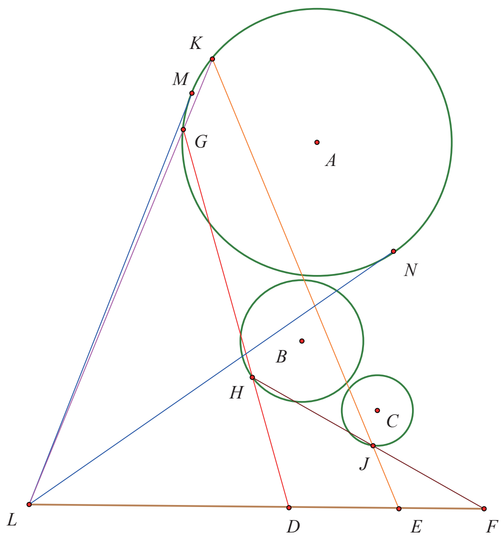


图 5-4-32

同时外切内切作法：

（1）作出三个圆的三个外位似中心 D、E、F，如图 5-4-33 所示。

（2）过 D 点作直线同时与⊙A、⊙B 相交，选取一对逆位似点 G、H。

（3）连结 HF，与⊙C 有两个交点，选取 H 点的逆位似点 J。

（4）作直线 EJ，与⊙A 有两个交点，选取 J 点的逆位似点 K。

（5）作直线 KG，交 DF 于 L 点。

（6）过 L 点作⊙A 的两条切线，切点为 M、N。

（7）连结 KD，与⊙B 有两个交点，选取 K 点的逆位似点 P。

（8）作直线 HP，交 DF 于 Q 点。

（这里省略了几条直线作图，因为一开始选取了 K 点，兜了一圈寻找逆位似点，最后必然是 H 点。）

（9）过 Q 点作⊙B 的切线切点 R、S。

（10）作直线 BS、AN，交点为圆心 O 点。

（11）作直线 AM、RB，交点为圆心 O'点。

（12）O 和 O'为所求圆的两个圆心，作出两个圆。

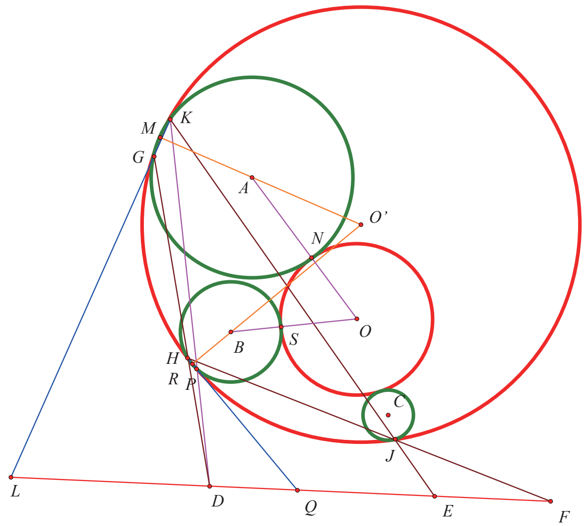


图 5-4-33

外切内切作法：

（1）作出⊙A、⊙B 外位似中心 D 点，⊙B、⊙C 内位似中心 E 点，⊙A、⊙C 内位似中心 F，如图 5-4-34 所示。

（2）过 D 点作直线同时与⊙A、⊙B 相交，选取一对逆位似点 G、H。

（3）作直线 EH，与⊙C 有两个交点，选取 H 的逆位似点 J。

（4）作直线 JF，与⊙A 有两个交点，选取 J 的逆位似点 K。

（5）作直线 KG，交 DF 于 L 点。

（6）过 L 点作⊙A 的两条切线，切点为 M、N。

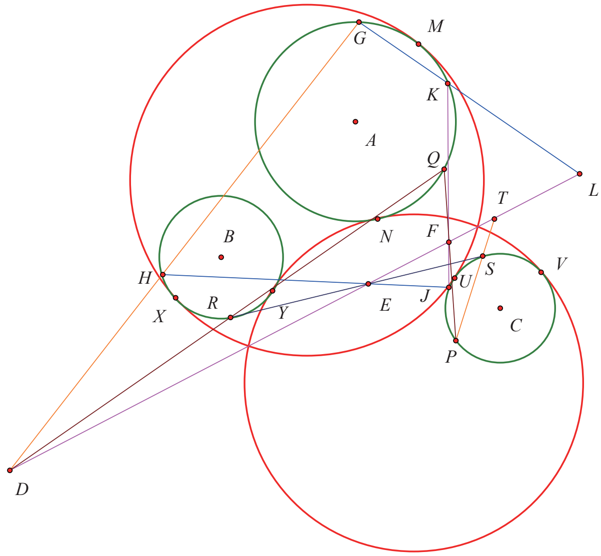


图 5-4-34

（7）过 F 点任作与⊙A、⊙C 相交的直线，选取一对逆位似点 P、Q。

（8）连结 QD，选取 Q 点的逆位似点 R。

（9）作直线 RE，选取 R 点的逆位似点 S。

（10）作直线 PS，交 DF 于 T 点。

（11）过 T 点作⊙C 的切线，切点为 U、V。同上，作出⊙B 的两个切点 X、Y。

（12）过 M、X、U 三点的圆为一个解，过 Y、N、V 三点的圆为另一个解。DF 为三圆的一条内位似轴，另外两条位似轴解法类似，三条内位似轴有六个解，加上外位似轴两个解，共计八个解。

解法四：

同时外切内切作法：

（1）作出⊙A、⊙B、⊙C 的根心（等幂心）D，如图 5-4-35 所示。

（2）过 D 点作⊙B 的切线 DG，切点为 G。

（3）以 D 点为圆心，DG 为半径作圆，则⊙D 同时与⊙A、⊙B、⊙C 正交（交点切线成直角）。

（4）作出⊙A、⊙B 的外位似中心 E；⊙A、⊙C 的外位似中心 F，则 EF 为三个圆的外位似轴。

（5）⊙D 与⊙B 的交点为 H、G，作直线 GH，交 EF 于 P 点。

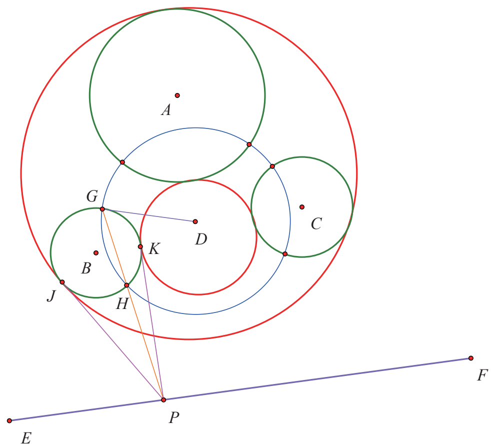


图 5-4-35

（6）过 P 点作⊙B 的两条切线，切点为 J、K，则所求圆必过 J、K 点，并且 J、K 为切点。重复上面的步骤，找出其余两圆所有切点，作出两个圆即为所求。

内切外切作法：

（1）作出⊙A、⊙B、⊙C 的根心（等幂心）D，如图 5-4-36 所示。

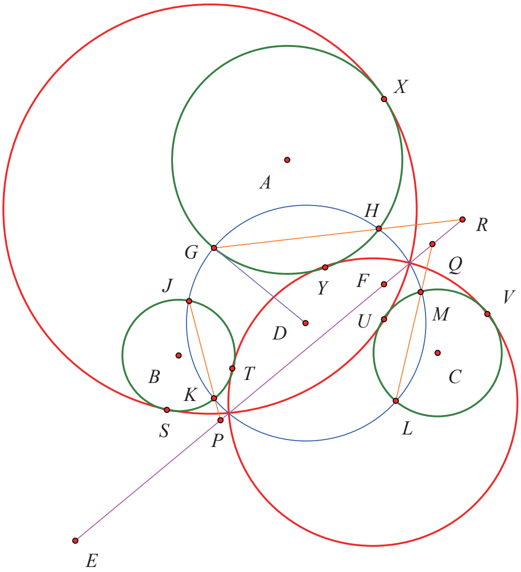


图 5-4-36

（2）过 D 点作⊙A 的切线 DG，切点为 G。

（3）以 D 点为圆心，DG 为半径作圆，则⊙D 同时与⊙A、⊙B、⊙C 正交（交点切线成直角）。⊙D 与⊙A、⊙B、⊙C 的交点分别为 G、H、J、K、L、M。

（4）作出⊙A、⊙B 的外位似中心 E；⊙A、⊙C 的内位似中心 F，则 EF 为三个圆的内位似轴。

（5）作直线 JK、LM、GH，交 EF 于 P、Q、R 三点。

（6）过 P 点作⊙B 的两条切线，切点为 S、T。类似的，过 Q、R 作出另外两圆的切点 U、V、X、Y。

（7）过 T、Y、V 三点的圆为其中一个解；过 S、U、X 三点的圆为另一个解。

三个圆有三条内位似轴，另外两条作法与此类似，三条内位似轴有六个解，加上外位似轴两个解，共计八个解。

第五节

余音

关于三个圆的问题或相切圆问题当然不止前面三节介绍的阿波罗尼奥斯问

题，本节介绍一些三个圆的问题及其他相切圆问题。

1．九点圆

三角形的三个垂足、三边的中点、三个顶点到垂心的三个中点九点共圆，这个圆叫做三角形的九点圆，如图 5-5-1 所示。九点圆与三角形的三个旁切圆外切，与三角形的内切圆内切。

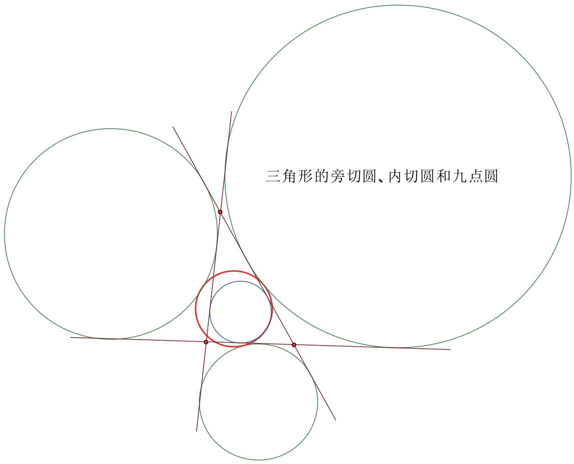


图 5-5-1

九点圆推广到三维：

垂心四面体定义：四条高线共点的四面体称作垂心四面体，此点称作四面体的垂心。

垂心四面体各棱的中点、各棱相对于对棱的垂心、垂心到顶点的中点 12 点共球。

最早提出九点圆的是英国的培亚敏・俾几（Benjamin Beven），问题发表在 1804 年的一本英国杂志上。一位高中教师费尔巴哈（1800—1834）也研究了九点圆，获得了九点圆的一些重要性质，结果于 1822 年发表，所以也有人将九点圆称作费尔巴哈圆。

作图问题：

已知三角形的两个旁切圆和一个内切圆（三角形未知），求作三角形的九点圆（作法参照阿波罗尼奥斯问题的作法，在此略）。

2．三圆正交

正交圆：两个圆相交，同一交点对两个圆的切线互相垂直，称为两个圆正交。

作图问题：以三个已知点为圆心，求作三个相互正交的圆。

已知 A、B、C 三点，求以这三点为圆心，作出三个相互正交的圆。

作法：

分别以三角形三边为直径作三个圆，三个圆和三条高的交点为 D、E、F，分别以顶点到 D、E、F 为半径作圆，则三个圆正交，如图 5-5-2 所示。

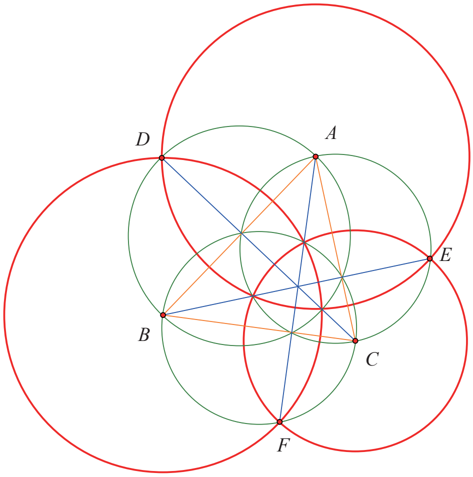


图 5-5-2

3．蒙日问题

已知平面上三个圆，求作一圆和这三个圆正交。

作法：

（1）作出三个圆的根心（等幂心）O，如图 5-5-3 所示。

（2）过 O 点向任意一个圆作切线，切点为 D。

（3）以 O 为圆心，OD 为半径的圆为所作的圆。

附根心作法：

两个圆的一条外公切线两个切点的中点与两圆连心线的垂线为两圆的根轴，三个圆的三条根轴交于同一点，该点为三个圆的根心，也叫等幂心。

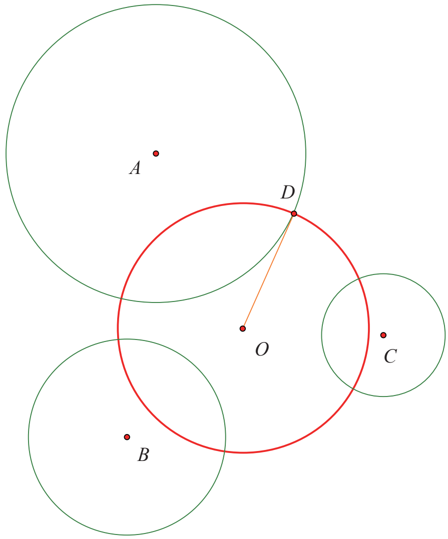


图 5-5-3

4．米勒定理

1417 年，德国数学家米勒向诺德尔教授提出了一个十分有趣的问题：在地球表面的什么部位，一根垂直的悬杆呈现最长？即在什么部位，视角最大？

这是个最大视觉角度问题，最大视角问题作为数学史上 100 个著名的极值问题中的第一个极值问题而引人注目。地球表面是弧形的，解这类问题要用到球面几何学，比较麻烦。现实生活中，如果杆的长度不长，距离地面也不远，简化问题可以将地面视为平面，不过悬杆的位置可以任意选择，不必垂直于地面，其解法多种多样。

米勒定理：已知点 E、F 是角 $\angle BAC$ 的边 AB 上的两个定点，点 D 是边 AC

上的一个动点，则当且仅当△EFD 的外接圆与边 AC 相切于 D 点时，∠EDF 最大，如图 5-5-4 所示。

已知∠BAC，D 点为 AC 上的一动点，E、F 为 AB 上固定的两点。

问 D 点在什么位置时，∠EDF 取得最大值？

作法：

作一圆过 E、F 两点且与 AC 相切（参照阿波罗尼奥斯问题作图），符合这种条件的圆有两个，于是切点也有两个，取较小的圆的切点即为所求 D 点。

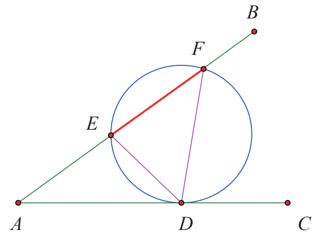


图 5-5-4

5．Soddy 点

已知△ABC，求作一点，使得此点到三角形任两个顶点连线构成的三个三角形周长相等。

这个问题乍一看无从下手，仔细分析，原来这点就是外 Soddy 点，有两种解法。

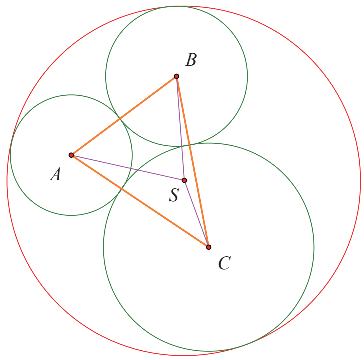


图 5-5-5

解法一：

已知△ABC，当 S 点是△ABC 的外 Soddy 点时，如图 5-5-5 所示，$SA+SB+AB= SA+SC+AC =SB+SC+BC$，具体作图参照阿波罗尼奥斯问题作图，在此略。

解法二：

已知△ABC，分别以三个顶点为圆心，顶点所对边长为半径作圆，同时内切于三个圆的圆心为 S，如图 5-5-6 所示，则 $SA+SB+AB=SA+SC+AC=SB+SC+BC$，具体作图参照阿波罗尼奥斯问题作图，在此略。

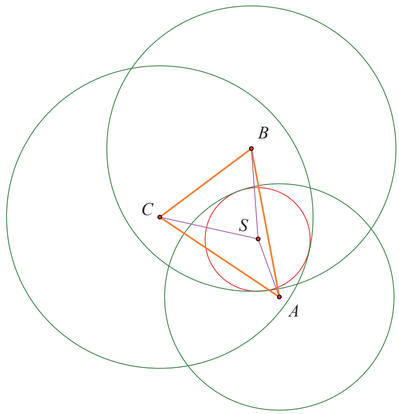


图 5-5-6

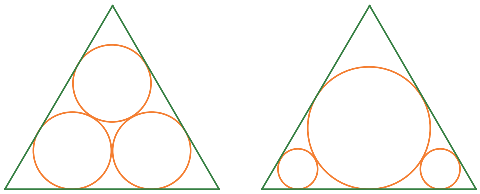
6．马尔法蒂问题（Malfatti's Problem）

马尔法蒂问题是一个求最大值的问题，1803 年意大利数学家马尔法蒂（G.F.Malfatti,1731—1807）提出了一个问题：对一个横截面是三角形的柱子，如何切割出三条圆柱，使得这三条圆柱的体积总和最大？

这个问题等价于："如何将一个三角形切割出三个面积之和最大的圆？"这就是著名的马尔法蒂问题。

马尔法蒂和当时的数学家们认为："当三角形内三个圆的每一个圆都与另外两个圆相外切，并且每一个圆都与三角形的两条边相切时，三个圆的面积之和最大"，三个解圆也叫"马尔法蒂圆（Malfatti circles）"这样一来，问题变成："在三角形内求作三个圆，要求这三个圆两两相互外切，并且每个圆同时与三角形的两条边相切"。

马尔法蒂没有给出这一猜想的证明，后来数学家研究发现这个猜想是错的，如图 5-5-7 所示，三角形是等边三角形时，马尔法蒂给出的解就不是最大值。



左边三个圆 面积之 和<右边三个圆面积之和

图 5-5-7

马尔法蒂问题颇有难度，求解及证明最大值不在本书讨论范围内，下面讨论的是马尔法蒂问题的作图问题："在一个已知三角形内作三个圆，使得每一个圆与其他两圆以及三角形两边相切"。

这个作图问题难度很大，用解析几何求解，三个内切圆的半径表达式非常复杂，很难实现作图。

1826 年，J.Steiner 给出了如下所示的解法，此解法比较简洁但没有给出证明，后来 Hart 博士给出了严格的证明，证明了此作法是正确的。

已知△*ABC*，求在△*ABC* 内作三个圆，每个圆与其他两圆以及三角形的两边相切。

作法：

（1）作出△*ABC* 的内切圆圆心，即内心 *D*，如图 5-5-8 所示。

（2）分别作出△*ABD*、△*ACD*、△*BCD* 的内切圆⊙*E*、⊙*F*、⊙*G*（这三个圆靠得很近，但并没有两两相切，而是互相外离，很显然，*AD*、*BD*、*CD* 是它们的其中一条内公切线）。

（3）作出⊙*E* 和⊙*F*、⊙*E* 和⊙*G*、⊙*F* 和⊙*G* 的另外一条内公切线 *PQ*、*TU*、*RS*。

（4）作一圆与 AB、AC、TU 相切（当然此圆也与 RS 相切）。与此类似，作出另外两圆，则这三个圆为所作的圆。

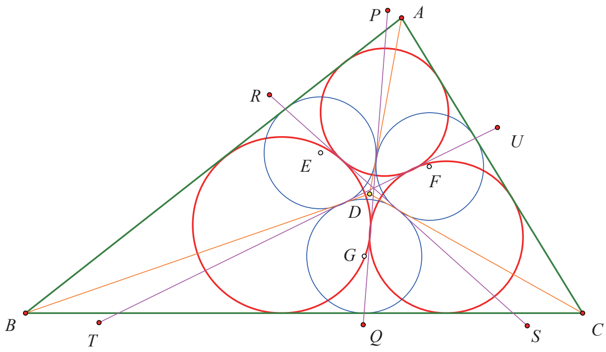


图 5-5-8

7．马尔法蒂问题推广

马尔法蒂问题颇有创意，将它推广到一般化的问题是：

已知平面上有三个图形，图形可以是直线或圆，求作三个圆，要求这三个圆两两相切，并且每一个圆都与给定图形中的两个相切。

根据给定图形元素可以将问题分成四类，分别是（见表 5-5-1 “一般马尔法蒂问题图表”）：线线线（LLL）、线线圆（CLL）、线圆圆（CCL）、圆圆圆（CCC）。

这个问题也可以看作是阿波罗尼奥斯问题的升级版，难度比阿波罗尼奥斯问题大了很多，马尔法蒂问题就是这里一般化问题的“线线线”问题，它总共有四组解，J.Steiner 给出的解法只是其中一组，另外的解如图 5-5-9 所示。

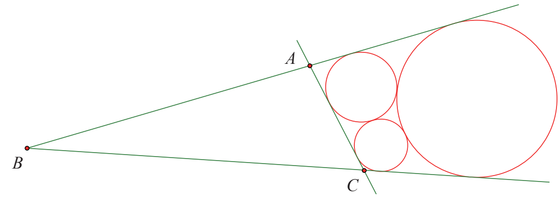
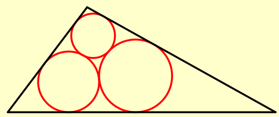


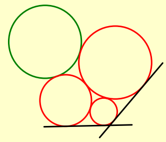
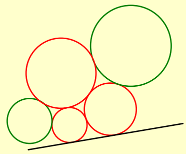
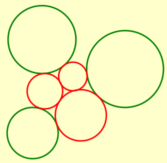
图 5-5-9

如图 5-5-9 所示只给出了 AC 边外侧的一组解，AB、BC 边外侧也各有一组解，加上三角形内部一组解，总共四组解。

表 5-5-1　一般马尔法蒂问题图表

序号	问题简写	缩写	示意图
1	线线线	LLL	

续表

序号	问题简写	缩写	示意图
2	线线圆	LLC	
3	线圆圆	LCC	
4	圆圆圆	CCC	

8．马尔法蒂问题的一般化问题解的图示

马尔法蒂问题的一般化问题比较复杂，作图难度很大，笔者至今尚未完全研究出所有问题的作图方法，亦未见相关资料介绍，解的作图方法就不介绍了，下面只给出问题部分解的简单图示，希望有读者可以完美攻克这一难题。

1）线线线

解圆只有一种情况，解圆全都相互外切，具体图示见前面“马尔法蒂问题”的介绍。

2）线线圆

（1）解圆外切，如图 5-5-10 所示。

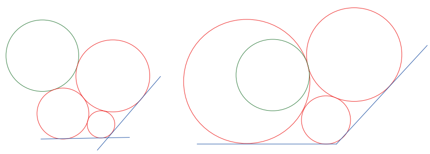


图 5-5-10

（2）解圆内切，如图 5-5-11 所示。

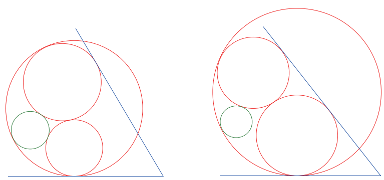


图 5-5-11

3）线圆圆

（1）解圆外切，如图 5-5-12 所示。

（2）解圆内切，如图 5-5-13 所示。

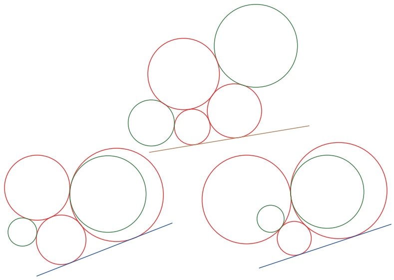


图 5-5-12

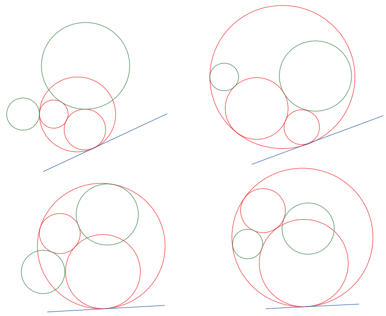


图 5-5-13

4）圆圆圆

（1）解圆外切，如图 5-5-14 所示。

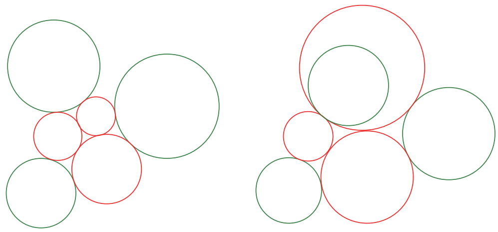


图 5-5-14

（2）解圆内切，如图 5-5-15 所示。

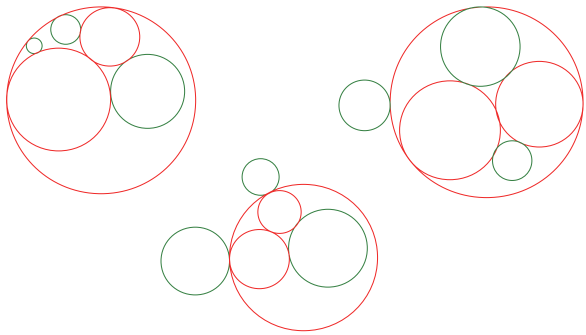


图 5-5-15

9. 卡斯蒂朗问题（Castillon's Problem）

卡斯蒂朗问题："已知一圆和三点，求作已知圆的内接三角形，使得三角形三边所在直线经过三个已知点"。

这个问题和相切圆没多大关系，但因为解题用到反演几何学的"极线"理论，

所以还是放到这里来讲解。当然，用别的理论也可以解决，只是没那么简单直观。卡斯蒂朗问题尺规作图如图 5-5-16 所示。

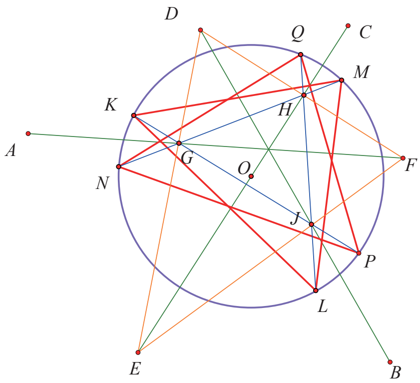


图 5-5-16

已知⊙O 及 A、B、C 三点，求作⊙O 内接三角形，要求三角形三边所在直线经过 A、B、C 三点。

作法：

（1）分别作 A、B、C 三点的极线 DE、EF、DF。

（2）连结 AF、DB、EC，交极线于 G、H、J 三点。

（3）作直线 GH、GJ、HJ，交⊙O 于 K、L、M、N、P、Q 六点，则△KLM 和△NPQ 为所作三角形。

第六章 单规作图

从本章开始到第九章介绍尺规作图的一些变种作图。这些变种尺规作图的作图工具只是进一步限制尺规作图的作图工具的使用规则，没有扩大作图工具的使用规则，所以它们仍属于尺规作图范畴。

古希腊数学的基本精神是从尽可能少的原始假设推导出尽可能多的结论，自然会有人去琢磨是否可以对尺规作图的作图工具进一步简化和限制，所以“单规作图”“单尺作图”“锈规作图”等问题的提出是迟早的事。这是一片广阔的天地，是对尺规作图的进一步延伸和发展。这些变种作图难度比尺规作图的难度大许多，许多原本简单的作图问题都要大费周折才能解决。

第一节

基础知识

单规作图定义

只用一把圆规解决平面几何作图问题，就叫单规作图。

这里使用的圆规和尺规作图里的圆规一样，两脚可以自由张合，并且两脚无限长，可以作图任意半径的圆。

摩尔–马歇罗尼定理

单规可以作出尺规能够作出的所有点，单规也只能作出尺规能够作出的所有点，单规作图和尺规作图等价。

说明：只用圆规当然无法作出直线，不过尺规作图的本质是作出所求的点，而非图形的所有线条。所以如果单规作出了直线上的两个点就认为作出了直线，那么尺规作图能解决的问题，只用圆规也都可以解决了。

单规作图历史

1797 年，意大利数学家马歇罗尼（Lorenzo Mascheroni，1750—1800）在其著作《圆规几何学》中证明了一个结论：凡是用尺规作图能够作出的点，仅用一把圆规也能够把这些点作出。尺规作图的核心就是作所求的点，于是单规作图和尺规作图等价。

1928 年 J.Hjelmslev 无意中在哥本哈根一家旧书店发现了一本 1672 出版的几何专著《欧几里得》，作者是丹麦数学家摩尔（G.Mohr），里面包含了马歇罗尼的所有结论，才知道摩尔是首创，马歇罗尼只不过是重新发现了这一定理而已。后人将单规作图与尺规作图等价定理称作：摩尔-马歇罗尼定理。

1673 年摩尔发表了未署名的小册子《欧氏几何趣味补录》（Compendium

Euclidis Curiosi），还证明了直尺定规（开口固定的圆规）作图与尺规作图等价。

第二节
基本作图

1．作两点间任意等分点

解法一：

1）作两点间中点

已知 A、B 两点，单规求作其中点。

作法：

（1）以 B 点为圆心，AB 长为半径作圆，如图 6-2-1 所示。

（2）以 A 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙B 于 D 点。

（3）以 D 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙B 于 E 点。

（4）以 E 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙B 于 F 点。

（5）以 F 点为圆心，AF 长为半径作圆，交⊙A 于 G、H 两点。

（6）分别以 G、H 为圆心，AB 长为半径作圆，交点为 C，则 C 点为 AB 的中点。

当然，找出 F 点的方法可以略加改进，以 D 点为圆心 AE 长为半径作弧，就可以找到 F 点。这里只是为了便于读者直观了解，所以没采用最简作图。

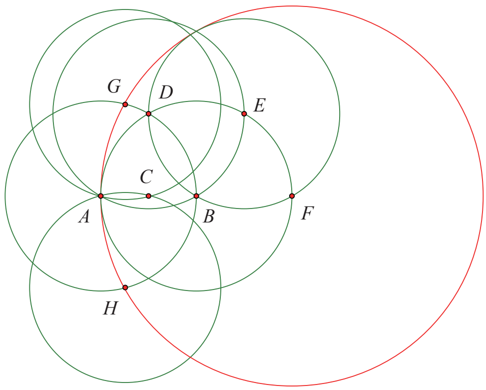
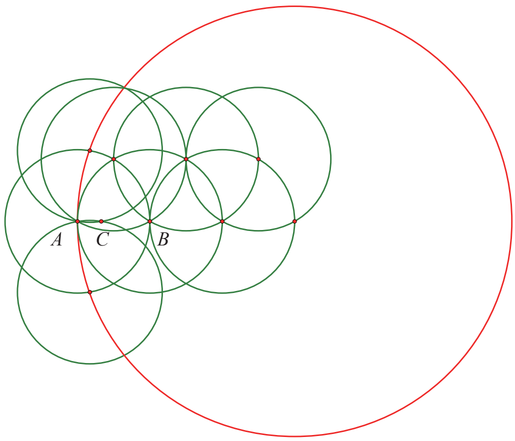


图 6-2-1



小圆半径均相等，大圆半径等于小圆半径的三倍

图 6-2-2

2）作两点间三等分点

作法如图 6-2-2 所示。

3）作两点间任意等分点

已知 A、B 两点，单规作出其任意等分点。

作法：

一般的，若 $AO=nAB$，以 O 为圆心，AO 长为半径作弧。以 A 点为圆心，AB 长为半径作弧，交⊙O 于 D、E 两点，分别以 D、E 为圆心，AB 长为半径作弧，

交点为 C 点，则 C 点为 AB 的 n 等分点，如图 6-2-3 所示。

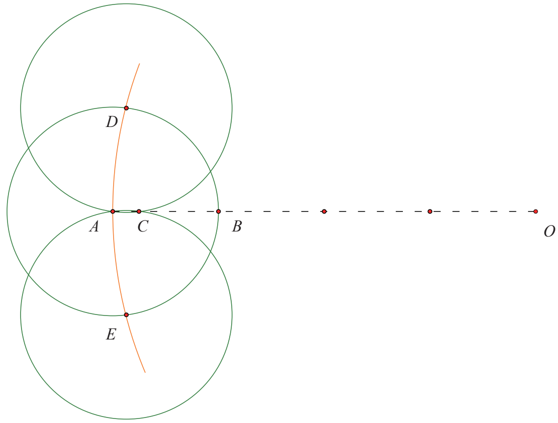


图 6-2-3

解法二：

1）作两点间中点

已知 A、B 两点，单规求作其中点。

作法：

（1）以 A 点为圆心，AB 长为半径作圆，如图 6-2-4 所示。

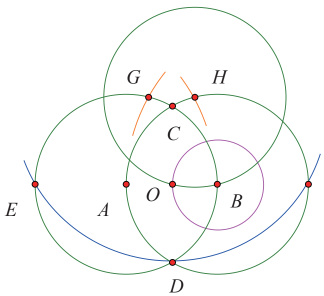


图 6-2-4

（2）以 B 点为圆心，AB 长为半径作圆，交 $\odot A$ 于 C、D 两点。

（3）以 C 点为圆心，CD 长为半径作弧，交 $\odot A$ 于 E 点，交 $\odot B$ 于 F 点。

（4）以 E 点为圆心，BE 长为半径作弧，交 $\odot B$ 于 H 点。

（5）以 F 点为圆心，AF 长为半径作弧，交 $\odot A$ 于 G 点。

（6）以 H 点为圆心，HB 长为半径作圆。

（7）以 B 点为圆心，GH 长为半径作圆，交 $\odot H$ 于 O 点，则 O 点为 AB 的中点。

2）作两点间任意等分点

已知 A、B 两点，单规求作其任意等分点。

作法：

一般的，以 A、B 为圆心，AB 长为半径作两个圆。若 C、A、B、D 四点共线，并且 $CB=AD=nAB$，以 C 点为圆心，BC 长为半径作弧，交 $\odot B$ 于 F 点。以 D 点为圆心，AD 长为半径作弧，交 $\odot A$ 于 E 点。则 $EF=\frac{n-1}{n}AB$，接下来以 E 点为圆心，AB 长为半径作圆，以 B 点为圆心，EF 长为半径作圆，与 $\odot E$ 的交点 G 即为

AB 的 n 等分点，如图 6-2-5 所示。

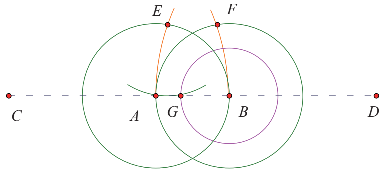


图 6-2-5

解法三：

1）作两点间中点

单规作出 A、B 两点间中点。

（1）以 A 点为圆心，AB 为半径作圆，如图 6-2-6 所示。

（2）以 B 点为圆心，AB 为半径作圆，交⊙A 于 C、D 两点。

（3）以 D 点为圆心，CD 为半径作圆，交⊙A 于 E 点。

（4）以 E 点为圆心，BE 为半径作圆，交⊙B 于 F、G 两点。

（5）分别以 F、G 为圆心，BF 长为半径作圆，交点为 H，则 H 为 AB 的中点。

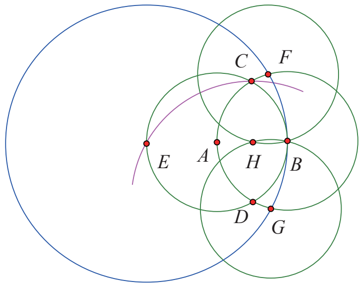


图 6-2-6

2）作两点间任意等分点

已知 A、B 两点，单规作出其任意等分点。

作法：

一般的，D、A、B、E 四点共线，并且 $DA=AB$，$BE=nAB$，分别以 A、B 点为圆心，AB 长为半径作圆，交于 F 点。

以 E 点为圆心，EF 长为半径作弧。以 D 点为圆心，BD 长为半径作弧，交⊙E 于 G、H 两点。分别以 G、H 为圆心，GB 长为半径作圆，交于 C 点，则 $AC=\dfrac{1}{n+2}AB$

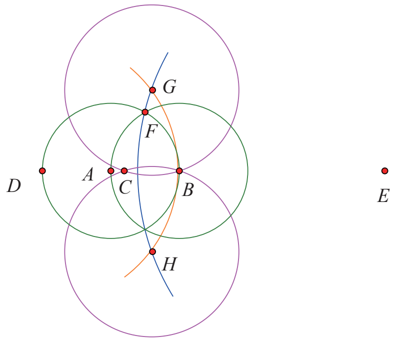


图 6-2-7

解法四：

1）作两点间中点

已知 A、B 两点，求单规作其中点。

作法：

（1）分别以 A、B 为圆心，AB 长为半径作圆，两圆交于 C、D 两点，如图 6-2-8 所示。

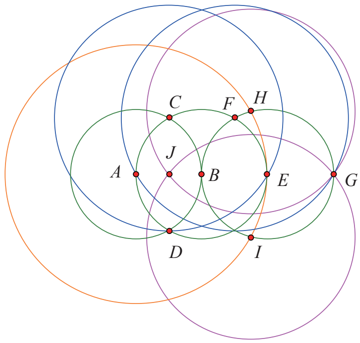


图 6-2-8

（2）以 C 点为圆心，CD 长为半径作弧，交⊙B 于 E 点。

（3）以 E 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙B 于 F 点。

（4）以 F 点为圆心，CD 长为半径作圆，交⊙E 于 G 点。

（5）以 A 点为圆心，AE 长为半径作圆，交⊙E 于 H、I 两点。

（6）分别以 H、I 点为圆心，HG 长为半径作圆，交于 J 点，则 J 点为 AB 的中点。

2）作两点间任意等分点

已知 A、B 两点，求单规作其任意等分点。

作法：

一般的，A、B、C、D 四点共线，并且 $AC=nAB$，$CD=(n-1)AB$。以 C 点为圆心，AB 长为半径作圆，如图 6-2-9 所示。以 A 点为圆心，AC 长为半径作弧，交⊙C 于 E、F 两点。分别以 E、F 为圆心，ED 长为半径作弧，交于 G 点，则 G 点为 AB 的 n 等分点。

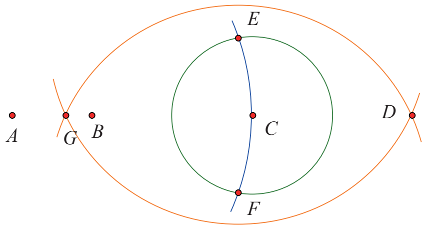


图 6-2-9

解法五：

1）作两点间三等分点

已知平面上有 A、B 两点，单规找出其三等分点。

作法：

（1）作出 C、D 两点，使得 $CA=AB=BD$，并且 C、A、B、D 四点共线，如图 6-2-10 所示。

（2）以 C 点为圆心，BC 长为半径作圆。

（3）以 D 点为圆心，CD 为半径作圆，交⊙C 于 E、F 两点。

（4）以 E 点为圆心，EC 为半径作圆。

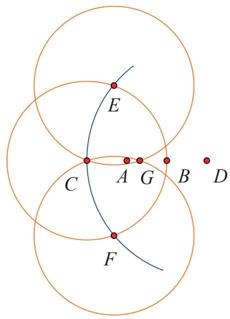


图 6-2-10

（5）以 F 点为圆心，EC 为半径作圆，交于 G 点，则 G 点为 AB 的三等分点。

2）作两点间任意等分点

已知平面上有 A、B 两点，单规找出其 n 等分点。

作法：

（1）作出 C、D 两点，使得 $AB=BD$，$AC=nAB$，C、A、B、D 四点共线，如图 6-2-11 所示。

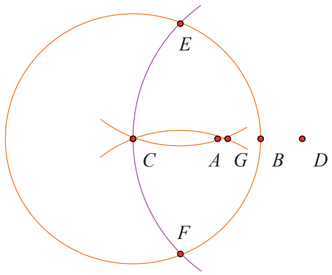


图 6-2-11

（2）以 C 点为圆心，BC 为半径作圆。

（3）以 D 点为圆心，CD 为半径作圆，交⊙C 于 E、F 两点。

（4）以 E 点为圆心，EC 为半径作圆。

（5）以 F 点为圆心，EC 长为半径作圆，交于 G 点，则 G 点为 AB 的 n 等分点。

解法六：

1）已知两点，作出距离等于 1/2 的点

已知平面上 A、B 两点，单规作出 $AB/2$ 线段。

作法：

（1）以 A 点为圆心，AB 为半径作圆，如图 6-2-12 所示。

（2）以 B 点为圆心，AB 为半径作圆，交⊙A 于 C、D 两点。

（3）以 C 点为圆心，CD 为圆心作弧，交⊙B 于 E 点。

（4）以 A 点为圆心，AE 为半径作圆。

（5）以 B 点为圆心，AE 为半径作圆，交以 AE 为半径的⊙A 于 F 点。

（6）以 F 点为圆心，AB 为半径作圆，交大圆 A 于 G 点，交大圆 B 于 H 点，则 $GH=AB/2$。

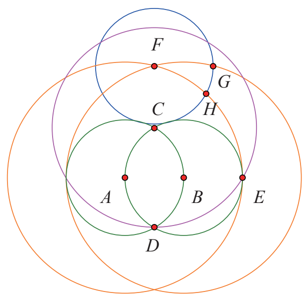


图 6-2-12

2）已知两点，作出距离等于 $1/n$ 的点

已知 A、B 两点，求作其 n 等分长度。

作法：

一般的，分别以 A、B 为圆心，nAB 长为半径作圆，两圆交于 C 点。以 C 点为圆心，AB 长为半径作圆，与⊙A 和⊙B 的交点为 D、E 点，则 $DE=\frac{1}{n}AB$，如图 6-2-13 所示。

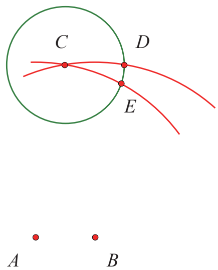


图 6-2-13

解法七：作出两点间 $\frac{1}{n^2}$ 点

已知 A、B 两点，单规求作其 $\frac{1}{n^2}$ 等分点。

作法：

（1）一般的，若 A、B、C 三点共线，并且 $AB=BC$，分别以 A、B 为圆心，nAB 长为半径作圆，交于 D、E 两点，如图 6-2-14 所示。

（2）以 D 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于 F 点。

（3）以 E 点为圆心，AB 长为半径作圆，交 $\odot A$ 于 G 点。

（4）分别以 F、G 为圆心，FC 长为半径作圆，交于 H 点，则 $HB=\dfrac{1}{n^2}AB$。

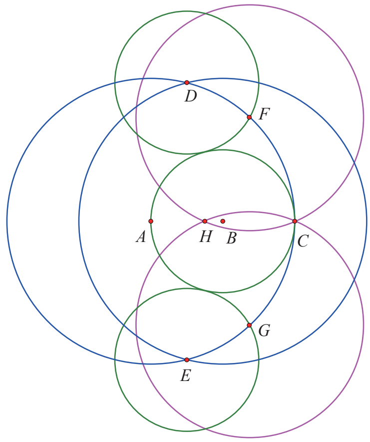


图 6-2-14

解法八：作两点间中点

已知平面上有 A、B 两点，用单规求作其中点。

分析：有一$\triangle XYZ$，$YZ=XZ=2$，$MZ=\dfrac{1}{2}$，若 $XY=YM$，那么以 X 点为圆心，XY 为半径作圆，必经过 M 点问题即变成了求解 XY 的长度。通过求解圆的方程组，得到数据如图 6-2-15 所示，作图方法如下。

（1）分别以 A、B 为圆心，AB 长为半径作圆，交于 C、D 两点。

（2）以 C 点为圆心，CD 长为半径作弧，与 $\odot A$ 交于 E 点。

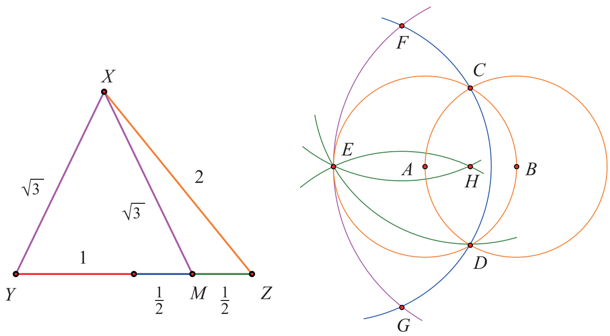


图 6-2-15

（3）以 B 点为圆心，BE 长为半径作弧。

（4）以 E 点为圆心，CD 长为半径作弧，与 $\odot B$ 交于 F、G 两点。

（5）分别以 F、G 点为圆心，CD 长为半径作弧，交点为 H，则 H 点为 AB 的中点。

解法九：作两点间中点

已知 A、B 两点，单规求作其中点。

分析：有一$\triangle XYZ$，其中 $XZ=YZ=1$，M 为 YZ 中点，若 $XY=XM$，那么以 X 为圆心，XY 为半径的圆必经过 M 点，作图就变成了求解 XY 的长度。通过解圆的方程组，我们可以得出数据如图 6-2-16 所示，于是作图方法如下。

（1）以 A 点为圆心作圆。

（2）以 B 点为圆心作圆，交圆 A 于 C、D 两点。

（3）以 C 点为圆心，CD 为半径作圆，交 $\odot A$ 于 E 点。

（4）以 E、B 点为圆心，CD 为半径作圆，交于 F 点。

（5）以 E 点为圆心，AF 长为半径作圆，交 $\odot B$ 于 G、H 两点。

（6）以 G、H 为圆心，GA 长为半径作圆，交点为 O，则 O 点为 AB 的中点。

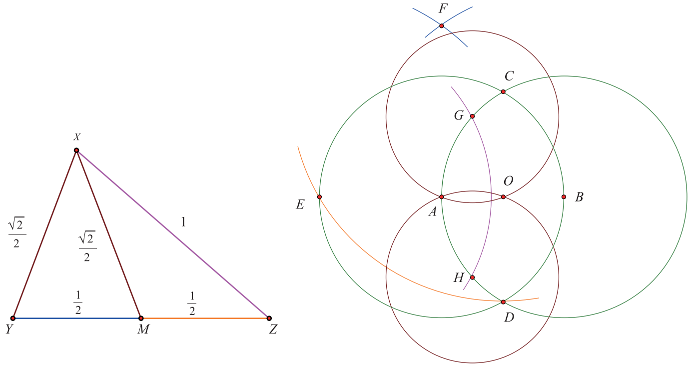


图 6-2-16

解法十：作两点间中点

已知平面上有 A、B 两点，用单规找出其中点。

作法：

（1）以 B 点为圆心，AB 为半径作圆，如图 6-2-17 所示。

（2）以 A 点为圆心，AB 为半径作圆，与⊙B 交于 C 点。

（3）以 C 点为圆心，AB 长为半径作圆，与⊙A 交于 D 点。

（4）以 D 点为圆心，AB 长为半径作圆，与⊙A 交于 E 点。

（5）分别以 E、B 为圆心，EC 长为半径作圆，两圆交于 F 点。

（6）以 E 点为圆心，FA 长为半径作圆，与⊙B 交于 G、H 两点。

（7）分别以 G、H 两点为圆心，GE 长为半径作圆，两圆交于 I 点，则 I 点为 AB 的中点。

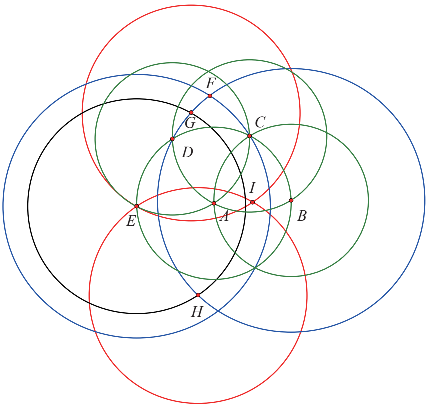


图 6-2-17

解法十一：作两点间中点

单规作出 A、B 两点间中点。

作法：

（1）以 A 点为圆心，AB 为半径作圆，如图 6-2-18 所示。

（2）以 B 点为圆心，AB 为半径作圆，交⊙A 于 C、D 两点。

（3）以 D 点为圆心，CD 为半径作圆，交⊙A 于 E 点，交⊙B 于 F 点。

（4）以 E 点为圆心，BE 为半径作圆，交⊙B 于 G。

（5）以 A 点为圆心，GF 为半径作圆，交⊙E 于 H、I 两点。

（6）以 H 点为圆心，AH 为半径作圆。

（7）以 I 为圆心，AI 为半径作圆，与⊙H 交于 J 点，则 J 点为 AB 的中点。

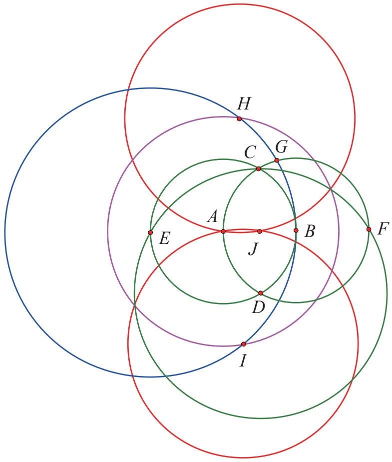


图 6-2-18

解法十二：作两点间三等分点

已知平面上有 A、B 两点，单规找出其三等分点。

作法：

（1）以 A 点为圆心，AB 为半径作圆。

（2）以 B 点为圆心，AB 为半径作圆，交 AB 于 C、D 两点。

（3）以 A 点为圆心，CD 长为半径作圆。

（4）以 B 点为圆心，CD 长为半径作圆，交大⊙A 于 E、F 两点。

（5）以 F 点为圆心，AB 长为半径作圆，交大⊙B 于 G 点，交大⊙A 于 H 点。

（6）以 E 点为圆心，GH 长为半径作圆。

（7）以 F 点为圆心，GH 长为半径作圆，交⊙E 于 I、J 两点，则 I、J 为 AB 的三等分点。

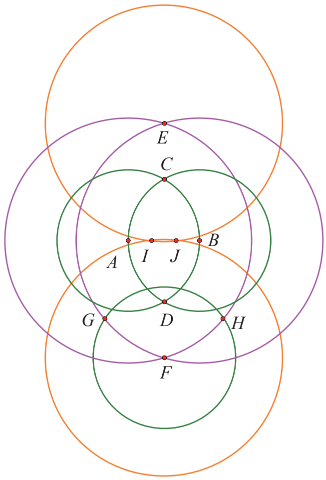


图 6-2-19

2. 作已知圆圆心

已知平面上有一圆周，圆心未知，单规求作其圆心。

解法一：

作法：

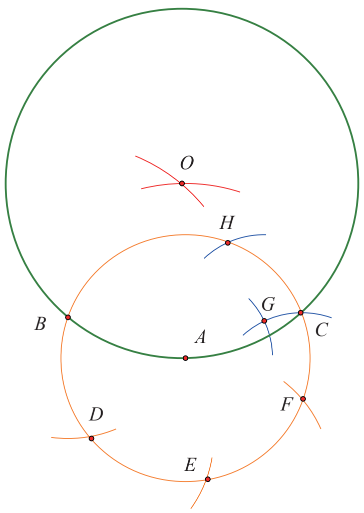


图 6-2-20

（1）在圆周上任取一点 A 为圆心，大于圆周半径的 $\frac{1}{2}$ 长为半径作圆，交原圆周于 B、C 两点，如图 6-2-20 所示。

（2）以 B 点为圆心，AB 长为半径作弧，交⊙A 于 D 点。

（3）以 D 点为圆心，AB 长为半径作弧，交⊙A 于 E 点。

（4）以 E 点为圆心，AB 长为半径作弧，交⊙A 于 F 点。

（5）分别以 A、F 为圆心，以 FC 长为半径作弧，交点为 G 点。

（6）以 G 点为圆心，FC 长为半径作弧，交⊙A 于 H 点。

（7）分别以 A、B 为圆心，BH 长为半径作弧，交点为 O，则 O 点为所作圆心。

从这个作法也可以知道，只要知道圆周上等距的 A、B、C 三点，单规就可以作出圆的圆心。

解法二：

作法：

（1）在圆周上任取一点 A 为圆心，大于圆周半径的 $\frac{1}{2}$ 长为半径作弧，交原圆周于 B、C 两点，如图 6-2-21 所示。

（2）分别以 B、C 为圆心，AB 长为半径作弧，交于 D 点。

（3）以 D 点为圆心，AD 长为半径作弧，交⊙A 于 E、F 两点。

（4）分别以 E、F 为圆心，AB 长为半径作弧，交于 O 点，则 O 点为所作圆心。

从这种方法可以知道，只要知道圆周上 A、B、C 三个等距点，就可以作出圆心。

求作已知圆圆心问题引申：

如果对于已知圆，只知道一段圆弧，并且圆弧太短，如图 6-2-20 和图 6-2-21 所示两个作出圆心的方法无法直接使用，又该怎么办？答案如图 6-2-22 所示。

已知平面上有一段圆弧 $\overset{\frown}{AB}$，圆心未知，单规求作其圆心。

分析：如果这段弧很长，那么前面的单规作圆心的方法依然管用。

如果这段弧很短该怎么办呢?

从前面两个单规作出圆的圆心的方法我们可以知道，只要知道圆周上三个等距的点，就可以作出圆的圆心，于是首要目标是先作出圆弧上的三个点，问题就解决了。

作法：

（1）在圆上截取四个等距离的点 A、C、D、E。

（2）分别以 E、C 点为圆心，EC 长为半径作弧，交于 F 点。

（3）以 F 点为圆心，AF 长为半径作弧，交以 ED 长为半径的⊙E 于 G 点。

则 G 点在 $\overset{\frown}{AB}$ 所在的圆周上，并且 $GD=AD$，现在就可以根据 G、D、A 这三个等距点来找出圆心了。假如 A、G、D 三个点的距离还太小，则继续重复上面步骤，直到作出距离足够大的三个等距点，然后再作出圆心。

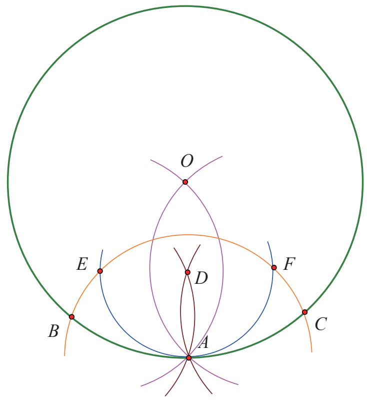


图 6-2-21

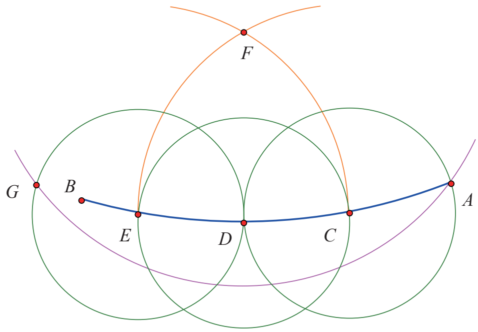


图 6-2-22

3. 作圆弧中点

已知 $\overset{\frown}{AB}$，圆心为 O（如果圆心未知，则先单规作出圆心），求作其弧的中点。

解法一：

作法：

（1）以 O 点为圆心，AB 长为半径作弧，如图 6-2-23（a）所示。

（2）以 B 点为圆心，AO 长为半径作弧，两弧交于 C 点。

（3）作出 CO 的中点 D（具体作法参考单规作出两点间中点的作法，此处略）。

（4）如图 6-2-23（b）所示，作出四个相等的圆，其半径长均等于 OD，此时 FI 是⊙E 的直径。

（5）分别以 F、I 为圆心，FH 为半径作弧，交于点 J。

（6）如图 6-2-23（c）所示，作出四个相等的圆，其半径长均等于 AO。

（7）以 K 点为圆心，JE 长为半径作弧，交⊙L 于点 Q。

（8）以 C 点为圆心，PQ 长为半径作弧，交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 R 点，则 R 点即为圆弧中点。

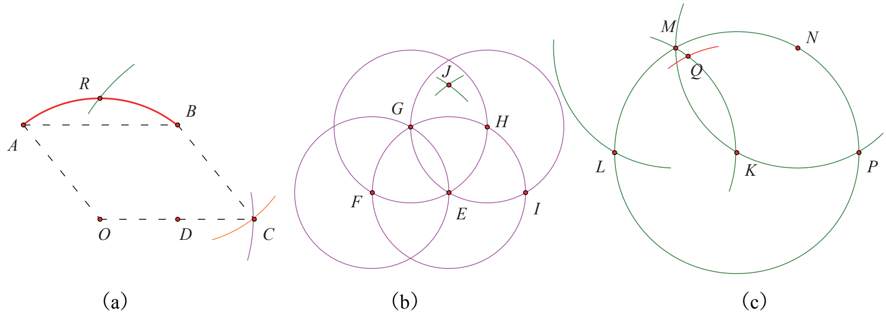


图 6-2-23

解法二：

已知 $\overset{\frown}{AB}$，圆心为 O，单规求作其弧的中点。

作法：

（1）以 O 点为圆心，AB 长为半径作圆。

（2）以 A 点为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于点 C。

（3）以 B 为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于点 D。

（4）分别以 C、D 点为圆心，CB 长为半径作弧，交于 E 点。

（5）以 D 点为圆心，OE 长为半径作弧，交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 F 点，则 F 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点。

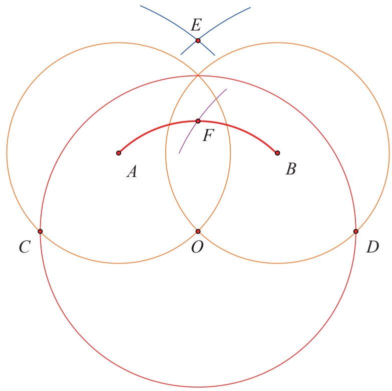


图 6-2-24

4．作直线交点

已知平面上有 A、B、C、D 四个点，单规求作 AB 与 CD 的交点。

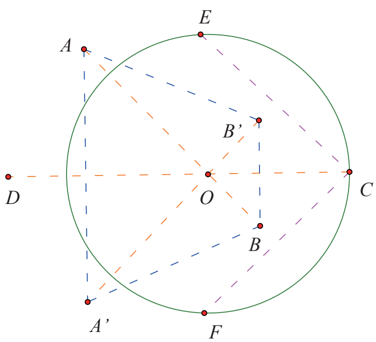


图 6-2-25

作法：

（1）分别作 A、B 关于 CD 轴的对称点 A' 和 B'，$AA'BB'$成等腰梯形，其对角线交点即是所求的两直线交点，如图 6-2-25 所示。具体作法：以 D 点为圆心，AD 为半径作圆。以 C 点为圆心，AC 为半径作圆，交点 A'为 A 的 CD 轴对称点。

（2）选取 CD 直线上任意一点，这里选取 C 点。作点 C 关于 AB 轴对称点 F。作 C 点关于 $A'B'$轴对称点 E，此时 $EC=FC$。

（3）过 E、F、C 三点的圆的圆心即为 AB 与 CD 的交点。因为 $EC=CF$，三个点是等距点，则很容易就能用求圆弧的圆心的

方法找出其圆心，即为所求的 AB 与 CD 的交点 O。

5. 作垂足

已知 A、B、C 三点，单规作出过 C 点，AB 的垂线的垂足。

作法：

（1）以 A 点为圆心，AC 长为半径作弧，如图 6-2-26 所示。

（2）以 B 点为圆心，BC 长为半径作弧，交点为 D。

（3）作出 CD 的中点 E，则 E 点为所作垂足。

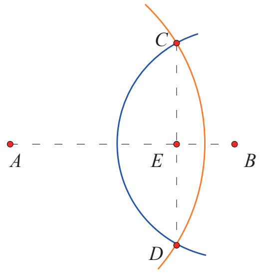


图 6-2-26

6. 作直线与圆弧的交点

情况一：直线不经过圆心

已知⊙A 和 B、C 两点，BC 不经过圆心 A，单规求作 BC 与⊙A 的交点。

作法：

（1）作 A 点关于 BC 轴的对称点 A'，如图 6-2-27 所示。

（2）以 A'点为圆心，⊙A 半径长为半径作圆，交⊙A 于 D、D'两点，则此两点为直线 BC 与⊙A 的交点。

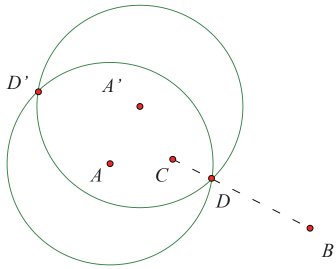


图 6-2-27

情况二：直线经过圆心

已知⊙A 以及 B 点，BA 经过圆心 A，单规求作 AB 与⊙A 的交点。

作法一：

以 B 为圆心，任意长为半径作圆，截取⊙A 的一段弧，然后再作此弧的中点。

作法二：

（1）作 AB 的中点 C，以 C 点为圆心，AC 长为半径作弧，交⊙A 于点 D，如图 6-2-28 所示。

（2）以 A 点为圆心，AB 长为半径作圆，在此圆周上截取 $BE=EF=FG$。

（3）分别以 B、G 为圆心，GE 长为半径作弧，交于 H 点。

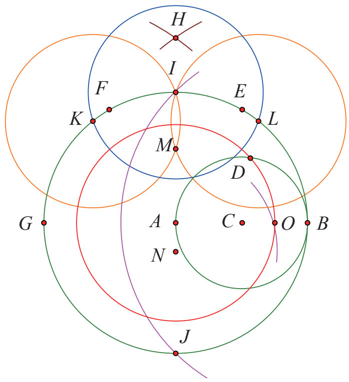


图 6-2-28

（4）以 B 点为圆心，AH 为半径作弧，交⊙A 于 I、J 两点。

（5）以 H 点为圆心，BD 长为半径作圆，交⊙A 于 K、L 两点。

（6）分别以 K、L 为圆心，KI 长为半径作圆，交于 M 点。

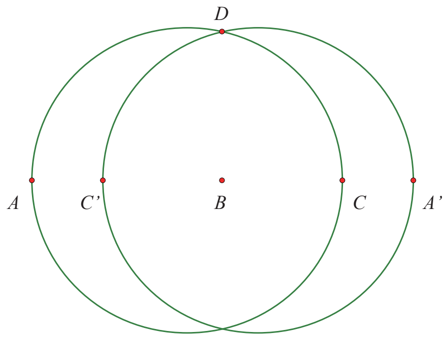


图 6-2-29

（7）作出 MJ 的中点 N，以 N 点为圆心，NM 长为半径作弧，交⊙A 于 O 点，则 O 点为所作的点。

7．线段开平方

已知 A、B、C 三点共线，$BC=1$，单规求作 $\sqrt{AB}$ 。

作法：

（1）作 A 点关于 B 点的对称点 A'，作 C 点关于 B 点的对称点 C'，如图 6-2-29 所示。

（2）以 AC 为直径作圆。

（3）以 $A'C'$为直径作圆，两圆交于 D 点，则 $DB=\sqrt{AB}$ 。

第三节

正多边形作图

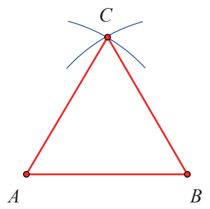


图 6-3-1

懂得单规的基本作图方法后，就可以将尺规作图作出正多边形的方法直接转换为单规作图，不过大多数情况下作图会很复杂，很多情况下，单规作图都有简化的作法。

1．正三角形

单规作出等边三角形。

解法一：

作法：

（1）在平面上任意取两点 A、B，如图 6-3-1 所示。

（2）以 A 点为圆心，AB 长为半径作弧。

（3）以 B 点为圆心，AB 长为半径作弧，与⊙A 交点为 C。则 C、A、B 三点为等边三角形的三个顶点。

解法二：

作法：

（1）任取两点 A、B，如图 6-3-2 所示。

（2）以 A 点为圆心，AB 长为半径作圆。

（3）以 B 点为圆心，AB 长为半径作圆，与⊙A 交点为 C、D。

（4）以 D 点为圆心，CD 长为半径作弧，与⊙A 交点为 E，则 C、E、D 三点为等边三角形的三个顶点。

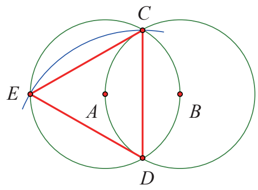


图 6-3-2

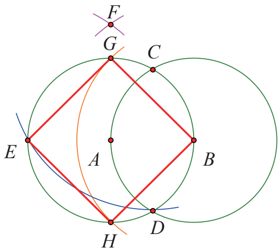


图 6-3-3

2．正方形

单规作出正方形。

解法一：经典作法

作法：

（1）任取一点 A 为圆心，任意长为半径作圆，如图 6-3-3 所示。

（2）在⊙A 上任取一点 B 为圆心，AB 长为半径作圆，与⊙A 交于 C、D 两点。

（3）以 C 点为圆心，CD 长为半径作弧，交⊙A 于 E 点。

（4）分别以 E、B 点为圆心，CD 长为半径作弧，交点为 F。

（5）以 B 点为圆心，AF 长为半径作弧，交⊙A 于 G、H 两点，则 G、E、H、B 点为正方形的四个顶点。

解法二：

原理：勾股定理，以 3、4、5 为边长的三角形一定是直角三角形。

作法：

（1）作出九个小圆，得到 A、B、C、D 四个点，如图 6-3-4 所示。此时 AB=4，CD=5，AE=3。

（2）以 A 点为圆心，AB 长为半径作弧。

（3）以 E 点为圆心，CD 长为半径作弧，与⊙A 交于 F 点。

（4）同上作出 G 点，则 F、A、B、G 四个点是正方形的顶点。

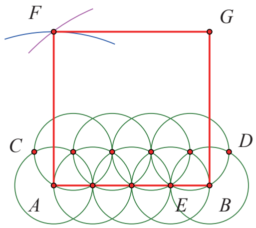


图 6-3-4

3．正五边形

单规作图作出正五边形。

解法一：经典作法

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 6-3-5 所示。

（2）在⊙O 上任取一点 A 为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于 B、C 两点。

（3）以 B 点为圆心，BC 长为半径作弧，交⊙O 于点 D。

（4）以 D 点为圆心，BC 长为半径作弧。

（5）以 A 点为圆心，BC 长为半径作弧，交⊙D 于点 E。

（6）分别以 B、C 为圆心，EO 长为半径作弧，交点为 F。

（7）以 A 点为圆心，EO 长为半径作弧，交⊙O 于点 G。

（8）以 G 点为圆心，GF 长为半径作弧，交⊙O 于 J、K 两点。

（9）以 J 点为圆心，GF 长为半径作弧，交⊙O 于点 L。

（10）以 K 点为圆心，GF 长为半径作弧，交⊙O 于点 M，则 G、J、L、M、K 为正五边形的五个顶点。

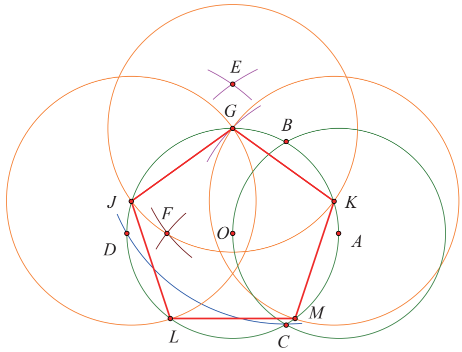


图 6-3-5

解法二：最简作法

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 6-3-6 所示。

（2）在⊙O 上任取一点 A 为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于 B、C 两点。

（3）以 B 点为圆心，BC 长为半径作弧，交⊙O 于点 D。

（4）以 D 点为圆心，BC 长为半径作弧。

（5）以 A 点为圆心，BC 长为半径作弧，交⊙D 于点 E。

（6）分别以 B、C 为圆心，EO 长为半径作弧，交点为 F。

（7）以 F 点为圆心，FO 长为半径作弧，交⊙O 于点 G、H。

（8）以点 A 为圆心，GH 长为半径作弧，交⊙O 于点 J、K，则 A、J、G、H、K 为正五边形的五个顶点。

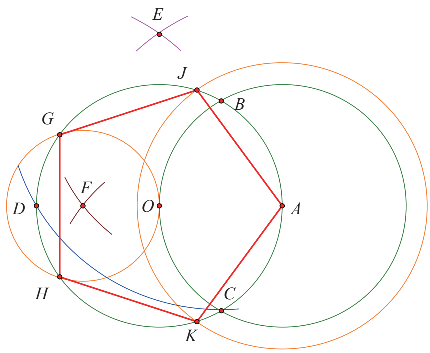


图 6-3-6

解法三：

作法：

（1）任取一点 A 为圆心，任意长为半径作圆，如图 6-3-7 所示。

（2）在⊙A 上任取一点 B 为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于 C、D 两点。

（3）以 C 点为圆心，CD 长为半径作弧，交⊙A 于点 F，交⊙B 于点 E。

（4）以 F 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于点 G。

（5）以 G 点为圆心，CD 长为半径作弧，交⊙F 于点 H。

（6）分别以 E、H 点为圆心，EF 长为半径作弧，交点为 J。

（7）以 E 点为圆心，AJ 长为半径作弧，交⊙A 于点 K、L。

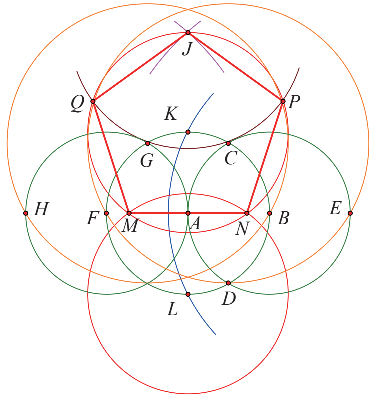


图 6-3-7

（8）以 K 点为圆心，KJ 长为半径作圆。

（9）以 L 为圆心，JK 长为半径作圆，交⊙K 于点 M、N。

（10）以 J 为圆心，MN 长为半径作圆，交⊙K 于 P、Q 两点，则 J、Q、M、N、P 为正五边形的五个顶点。

4．正六边形

单规作出正六边形。

解法一：

作法：

（1）作出任意圆⊙A，如图 6-3-8 所示。

（2）在⊙A 上任取一点 B 为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于 C、D 两点。

（3）同上，顺次截取 E、F、G 三点。则 E、F、G、D、B、C 为正六边形的六个顶点。

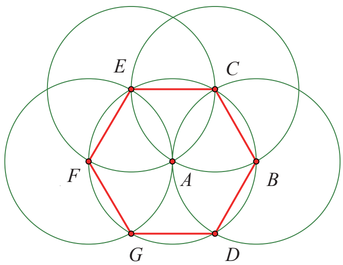


图 6-3-8

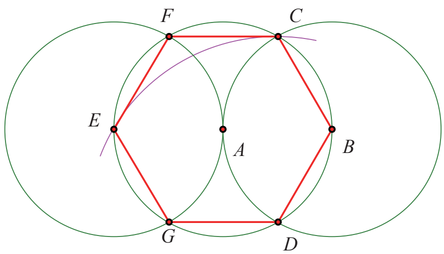


图 6-3-9

解法二：

作法：

（1）任取一点 A 为圆心，任意长为半径作圆，如图 6-3-9 所示。

（2）在⊙A 上任取一点 B 为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于 C、D 两点。

（3）以 D 点为圆心，CD 长为半径作弧，交⊙A 于点 E。

（4）以 E 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于点 F、G，则 F、E、G、D、B、C 为正六边形的六个顶点。

5．正八边形

单规作出正八边形。

解法一：最简作法

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 6-3-10 所示。

（2）在⊙O 上任取一点 A 为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于 B、C 两点。

（3）以 B 点为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于点 D。

（4）分别以 C、D 点为圆心，BC 长为半径作弧，交点为 E。

（5）以 E 点为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于 F、G 两点。

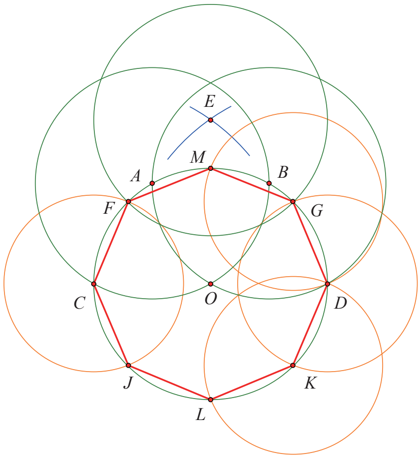


图 6-3-10

（6）此时 FC 为正八边形的边长，余下可以作出 J、K、L、M 四点。

当然，以 C 点为圆心，EO 长为半径作弧，可以作出 M、L 两点，作图步骤精简了一步，这里为了美观，就不采取这种作法啦。

则点 M、F、C、J、L、K、D、G 为正八边形的所有顶点。

解法二：

作法：

（1）以相同半径作出 11 个圆，得到 A、B、C、D、E、F、G 七个关键点，如图 6-3-11 所示。

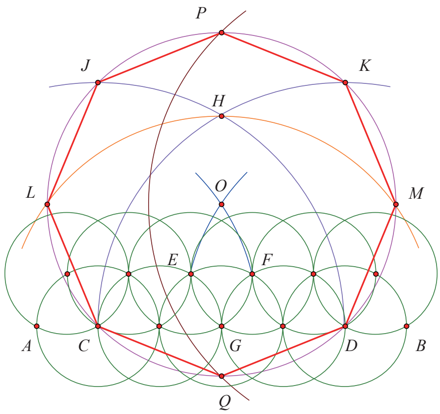


图 6-3-11

（2）分别以 C、D 为圆心，CD 长为半径作弧，交点为 H。

（3）分别以 A、B 为圆心，AF 长为半径作弧，交点为 O。

（4）以 O 点为圆心，OC 长为半径作圆，交⊙C 于 J 点，交⊙D 于 K 点。

（5）以 G 点为圆心，GH 长为半径作弧，交⊙O 于 L、M 两点。

（6）以 M 点为圆心，HC 长为半径作弧，交⊙于 P、Q 两点，则 P、J、L、C、Q、D、M、K 为正八边形的顶点。

解法三：

作法：

（1）作出任意⊙A，半径为 AB，如图 6-3-12 所示。

（2）以 B 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于点 C。

（3）以 C 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于点 D。

（4）以 D 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于点 E。

（5）分别以 E、B 为圆心，EC 为半径作圆，交点为 F、G。

（6）以 G 点为圆心，GF 长为半径作圆。

（7）以 F 点为圆心，AF 长为半径作圆，交⊙G 于 H、I 两点。

（8）分别以 H、I 点为圆心，AF 长为半径作圆，交点为 J。

（9）以 J 点为圆心，JF 长为半径作圆，交⊙A 于 K、L 两点。

（10）以 E 点为圆心，KL 长为半径作圆，交⊙A 于 P、Q 两点。

（11）以 Q 点为圆心，PK 长为半径作圆，交⊙A 于 N、M 两点。则 P、L、B、N、Q、M、E、K 为正八边形的顶点。

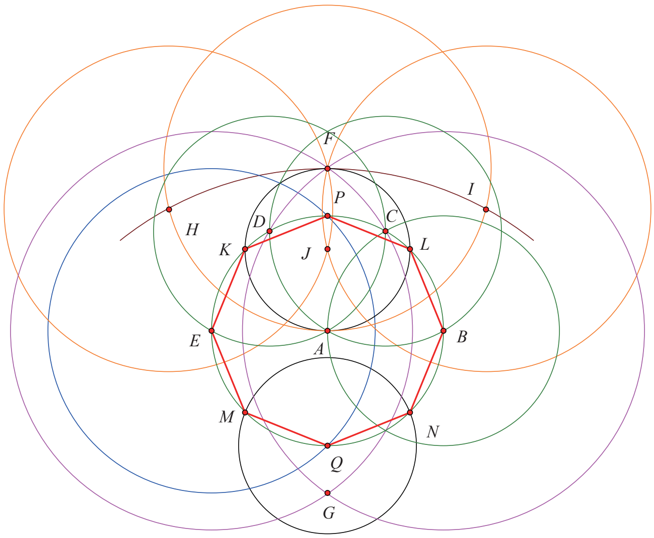


图 6-3-12

6．正十边形

单规作出正十边形。

作法：（最简作法）

（1）在平面上任取两点 A、B，以 A 点为圆心，AB 长为半径作圆，如图 6-3-13 所示。

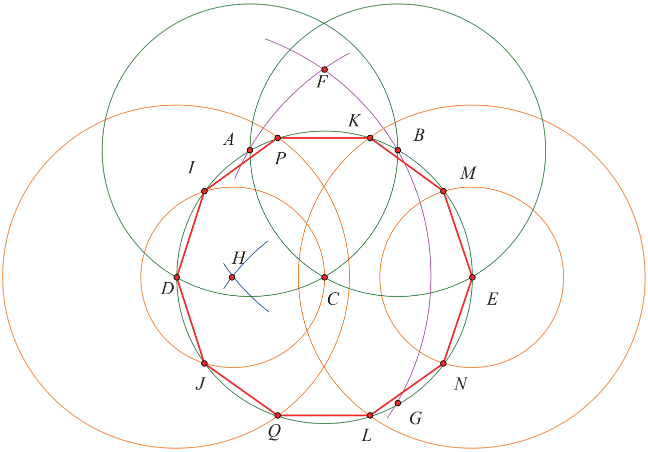


图 6-3-13

（2）以 B 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于 C 点。

（3）以 C 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于 D 点，交⊙B 于 E 点。

（4）以 E 点为圆心，AE 长为半径作圆。

（5）以 D 点为圆心，BD 长为半径作圆，交⊙E 于 F 点，交⊙C 于 G 点。

（6）以 G 点为圆心，FC 长为半径作弧。

（7）以 B 点为圆心，CF 长为半径作弧，交⊙G 于 H 点。

（8）以 H 点为圆心，HC 长为半径作圆，交⊙C 于 I、J 两点。

（9）以 E 点为圆心，IJ 长为半径作圆，交⊙C 于 L、K 两点。

（10）以 E 点为圆心，ID 长为半径作圆，交⊙C 于 M、N 两点。

（11）以 D 点为圆心，IJ 长为半径作圆，交⊙C 于 P、Q 两点，则 D、I、P、K、M、E、N、L、Q、J 为正十边形所有顶点。

7．正十二边形

单规作出正十二边形。

作法：（最简作法）

（1）任取一点 A 为圆心，任意长为半径作圆，如图 6-3-14 所示。

（2）在⊙A 上任取一点 B 为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于 C、D 两点。

（3）以 C 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于点 E。

（4）以 D 点为圆心，CD 长为半径作弧，交⊙A 于点 F。

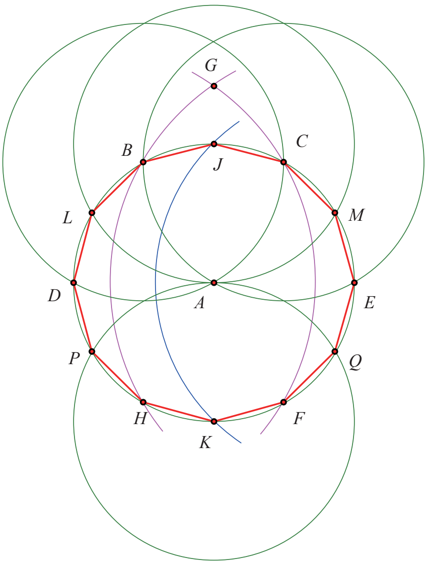


图 6-3-14

（5）以 E 点为圆心，CD 长为半径作弧，交⊙D 于点 G，交⊙A 于点 H。

（6）以 E 点为圆心，AG 长为半径作弧，交⊙A 于点 J、K。

（7）以 J 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于点 L、M。

（8）以 K 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于点 P、Q，则 J、B、L、D、P、H、K、F、Q、E、M、C 为正十二边形所有顶点。

8．正十五边形

单规作出正十五边形。

解法一：

作法：

（1）作出任意圆 A，半径为 AB，如图 6-3-15 所示。

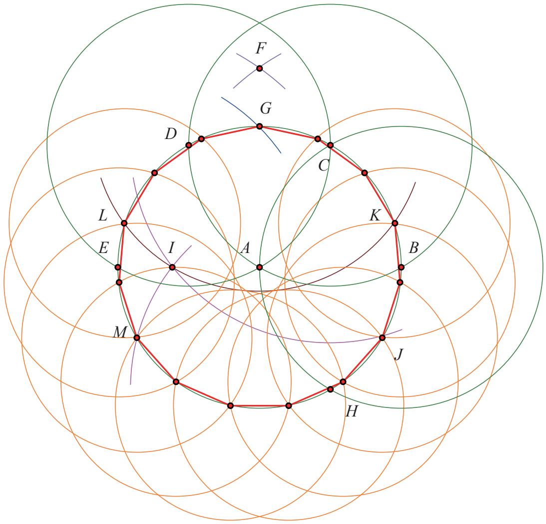


图 6-3-15

（2）以 B 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于 C、H 两点。

（3）以 C 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于 D 点。

（4）以 D 点为圆心，AB 长为半径作圆，交⊙A 于 E 点。

（5）以 E 点为圆心，EC 长为半径作圆。

（6）以 B 点为圆心，BD 长为半径作圆，交⊙E 于 F 点。

（7）以 E 点为圆心，AF 长为半径作圆，交⊙A 于 G 点。

（8）以 H 点为圆心，AF 长为半径作圆，交⊙A 于 M 点。

（9）以 C 点为圆心，AF 长为半径作圆，交⊙H 于 I 点，交⊙A 于 J 点。

（10）以 G 点为圆心，GI 长为半径作圆，交⊙A 于 K、L 两点。

（11）由于已有 K、L、M、J、G 点，所以以其中任意一点为起点，KJ 长为半径在⊙A 上再截取 10 次便找出了所有顶点。

解法二：

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆。

（2）在⊙O 上任取一点 A 为圆心，以 AO 长为半径作弧，交⊙A 于 B、C 两点。

（3）以 C 点为圆心，BC 长为半径作弧，交⊙O 于 D 点。

（4）以 D 点为圆心，BC 长为半径作弧。

（5）以 A 点为圆心，BC 长为半径作弧，交⊙O 于 E、F 两点，交⊙D 于点 G。

（6）分别以 B、C 点为圆心，OG 长为半径作弧，交点为 H。

（7）以 H 点为圆心，OH 长为半径作圆，交⊙O 于 J、K 两点。

（8）以 A 点为圆心，JK 长为半径作弧，交⊙O 于 L、M 两点。

（9）分别以 A、L、J、K、M 为圆心，EJ 长为半径作圆，得到 N、P、Q、R、S、T、U、V 点，则 A、N、P、M、Q、F、K、R、S、J、E、T、L、U、V 为正十五边形所有顶点。

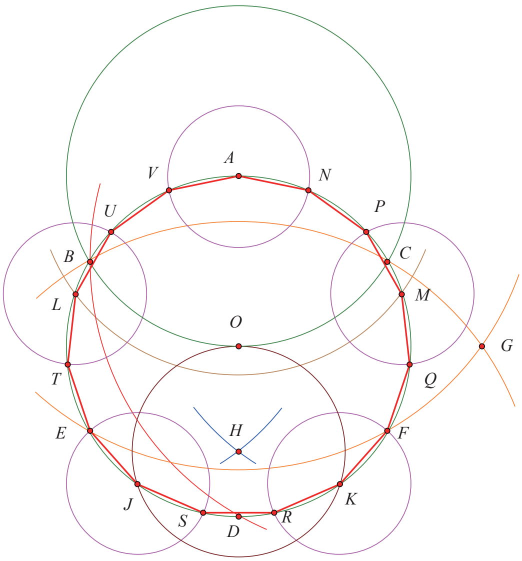


图 6-3-16

9．正十六边形

单规作出正十六边形。

说明：如果懂得正八边形单规作图，并且知道如何单规作出一段弧的中点，就可以单规作出正十六边形了，不过这样较繁琐。下面介绍两种简化的作图方法。

解法一：

作法：

（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 6-3-17 所示。

（2）在⊙O上任取一点 A 为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于点 B。
（3）以 B 点为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于点 C。
（4）以 C 点为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于点 D。
（5）分别以 D、A 点为圆心，DB 长为半径作弧，交点为点 E。
（6）以 E 点为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于 F。
（7）以 F 点为圆心，AO 长为半径作圆。
（8）以 O 点为圆心，AF 长为半径作圆，交⊙F 于 G 点，交⊙A 于 H 点。
（9）分别以 G、H 点为圆心，HF 长为半径作弧，交点为 J。
（10）以 H 点为圆心，OJ 长为半径作弧，与⊙O 交点为 K。此时 $FK=AK=$⊙O 的圆内接正十六边形的边长，接下来便可以截取正十六边形的所有顶点了。余下过程略。

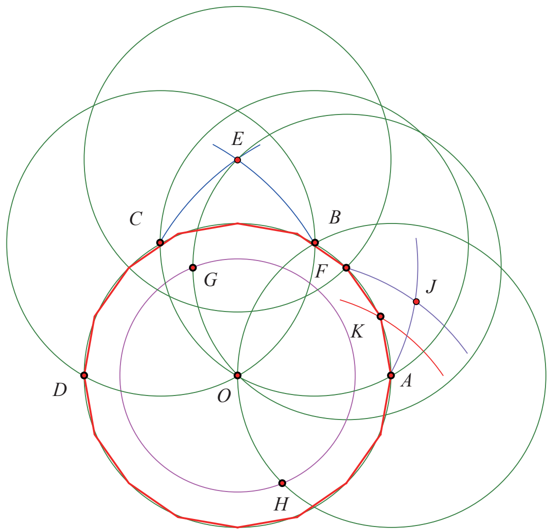


图 6-3-17

解法二：
作法：
（1）任取一点 O 为圆心，任意长为半径作圆，如图 6-3-18 所示。
（2）在⊙O 上任取一点 A 为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于 C、B 两点。
（3）以 B 点为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于点 D。
（4）分别以 C、D 为圆心，BC 长为半径作弧，交点为 E。
（5）以 E 点为圆心，AO 长为半径作圆，交⊙O 于 F、G 两点。
（6）分别以 F、D 为圆心，FD 长为半径作圆，交点为 H、J。
（7）以 J 点为圆心，HJ 长为半径作弧，交⊙D 于点 K。
（8）以 K 点为圆心，FK 长为半径作弧，交⊙F 于 L、M 两点。
（9）分别以 L、M 为圆心，LF 长为半径作圆，交点为 N。

（10）以 N 点为圆心，EN 长为半径作弧，交⊙O 于点 P。则 GP 为⊙O 内接正十六边形边长，接下来便可以轻松截取正十六边形所有顶点了，余下过程略。

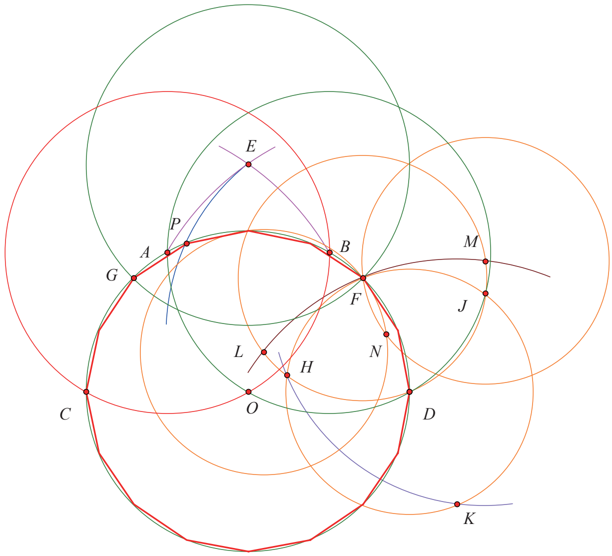


图 6-3-18

10．正十七边形

单规作出正十七边形。

为了简化，以 A 为圆心，AB 长为半径作圆，简写为(A,AB)；以 A 为圆心，AB 长为半径的圆，交以 C 为圆心，CD 长为半径的圆于 E、F 两点，简写为(A,AB) —(C,CD)，E、F，则作法如下。

作法：（纪勒儿方法）

（1）(O,AO)

（2）(O,AO)—(A,AO)，B

（3）(O,AO)—(B,AO)，C

（4）(O,AO)—(C,AO)，D

（5）(D,BD)—(A,BD)，E

（6）(D,OE)—(O,AO)，F、G

（7）(D,AD)—(A,BD)，H、I

（8）(H,AH)—(I,AH)，J

（9）(J,AO)—(O,AO)，K、L

（10）(K,OE)—(L,OE)，M、N

（11）(M,AO)—(F,OM)，P

（12）(M,AO)—(G,OM)，Q

（13）(P,EM)—(Q,EM)，R

（14）(F,NO)—(N,AO)，S

（15）(G,NO)—(N,AO)，T

（16）(S,NE)—(T,NE)，U

（17）(O,DU)—(R,DU)，V、W

（18）(V,UC)—(W,UC)，X

（19）(X,AO)—(O,AO)，Y、Z

此时 $AY=AZ=\odot O$ 内接正十七边形边长，如图 6-3-19 所示，接下来便可以轻松截取正十七边形所有顶点了。

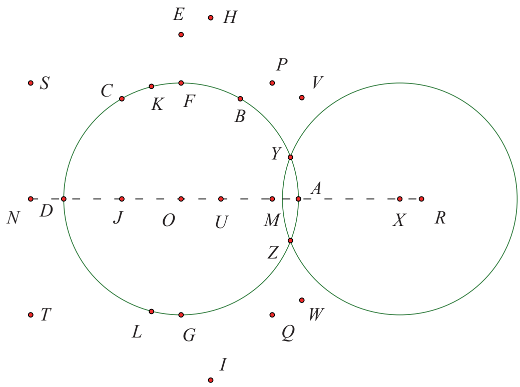


图 6-3-19

附：单规作正十七边形效果图（如图 6-3-20 所示）。

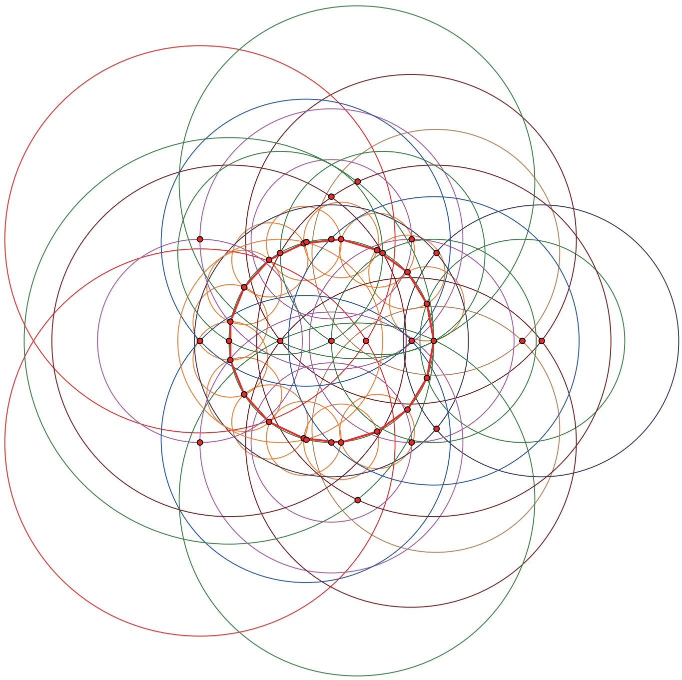


图 6-3-20

第七章 单尺作图

如果说单规作图是“柔性”的曲线作图，那么单尺作图就是“刚性”的直线作图。用射影几何学原理，很多单尺作图问题可以得到简洁优美的解，射影几何学在单尺作图领域是个利器。

单规作图不需要任何辅助条件，只用一把圆规即可完成所有可能的尺规作图。而单尺作图不同，它需要辅助条件（在平面上预先给出一个定圆并且知其圆心）才能完成所有可能的尺规作图。所以严格来讲，单尺作图的作图工具并非只有一把直尺。

第一节

基础知识

单尺作图定义

在平面上预先给定一个半径等于 1 的圆，并且知其圆心，在作图过程中只用一把无刻度的直尺来解决平面几何作图问题，就叫单尺作图。

这里的直尺和尺规作图里的直尺一样，都是无刻度并且长度无限的直尺。

单尺作图与尺规作图等价

给出单位圆及其圆心后，单尺可以也只能作出尺规可以作出的所有点，单尺作图和尺规作图等价。

说明：只用一把直尺当然无法作出圆弧，因此单尺能解决的作图问题也极为有限。但如果平面上预先有一个半径长等于 1 的圆，并且知其圆心，那么尺规作图便能作出的所有点，只用一把直尺也可以并且只能作出尺规作图可以作出的所有点。尺规作图的本质就是作出所求的点，而非作出图形的所有线条，单尺和尺规作出点的能力一样，所以说单尺作图和尺规作图等价。

单尺作图历史

1759 年，德国数学家兰伯特（J.H.Lambert,1728—1777）在他的数学专著中解决了作图问题：给一个定圆及其圆心，只用直尺能作尺规作图可以办到的一切作图问题。

1833 年瑞士数学家施泰纳（J.Steiner,1796—1863）在他的专著《用直尺和一定圆的几何作图》中完整、全面地进一步论证了这一作图问题，史称施泰纳直尺问题（Steiner's Straight Edge Problem）。

后人认为这样的作图实际工具有两个：“有圆心的单位定圆和无刻度的直尺”。这个圆是事先给定的，而且固定在平面上某个位置，在作图过程中不可移动，所

以叫定圆。规定圆的半径长等于 1，是为了解决作出指定长度的线段（例如：作出长度等于 $\sqrt{2}$ 的线段，如果没有规定单位长度，则无法作图）。预先有了已知圆心的单位定圆之后，直尺作图和尺规作图等价，换句话说，在尺规作图里，对圆规的使用可以减少到只使用一次就够了。

1940 年，意大利人塞韦里（Francesco Severi）又前进了一步，他证明：只要给定一段圆弧（不管弧长多小）及其圆心，直尺作图就和尺规作图等价。

预给的条件从整圆精简到残圆，别以为数学家们是吃饱了没事干，自找麻烦。这么极致的研究发现是难能可贵的，一些重大的定理往往从此诞生。

预先只给出小圆弧的单尺作图非常麻烦，本书不再介绍，有兴趣的读者可自行研究。

第二节

基本作图

1．已知平行线求作已知线段的中点

已知线段 AB，直线 $DE /\!/ AB$，求作 AB 的中点。

作法：

（1）任取一点 C，连结 CA 与平行线交于 D 点；连结 BC，与平行线交于 E 点，如图 7-2-1 所示。

（2）连结 BD、AE，交于 F 点。

（3）作直线 CF，交 AB 于 G 点，则 G 为 AB 中点。

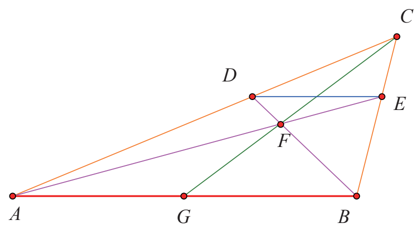


图 7-2-1

2．已知线段中点，过已知点求作平行线

已知线段 AB，中点为 C，AB 外一点 D，求作过 D 点 AB 的平行线。

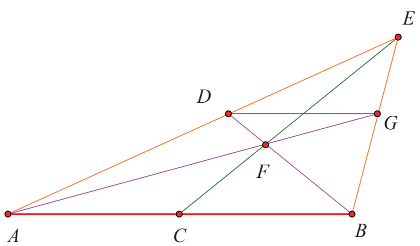


图 7-2-2

作法：

（1）作直线 AD，在 AD 上任取一点 E，如图 7-2-2 所示。

（2）连结 BE。

（3）连结 BD、EC，交点为 F。

（4）作直线 AF，交 BE 于点 G。

（5）作直线 DG，则 $DG /\!/ AB$。

3．已知单位定圆及其圆心，过已知点求作已知线段的平行线

已知⊙*O* 及其圆心 *O*，线段 *AB* 和一点 *C*，求过 *C* 点作 *AB* 的平行线。

作法：

（1）作两条任意直径 *DF*、*GE*，如图 7-2-3 所示。

（2）连结 *DE*、*GF*，根据 *DE*∥*GF*，作出 *GF* 的中点 *H*。

（3）作直线 *DG*、*OH*、*EF*，与 *AB* 所在的直线分别交于 *K*、*J*、*L* 三点，此时 *KJ*=*JL*。

（4）根据 *KJ*=*JL*，过 *C* 点作出 *AB* 的平行线，余下过程略。

顺便说一下，作出了 *AB* 的平行线后，就很容易将 *AB* 线段二等分。

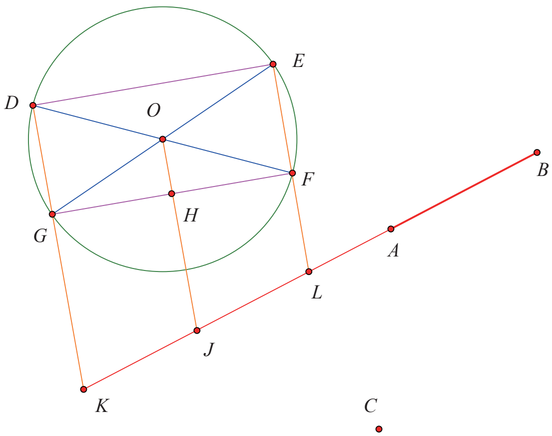


图 7-2-3

4．作垂线

情况一：过圆外一点作圆的直径的垂线

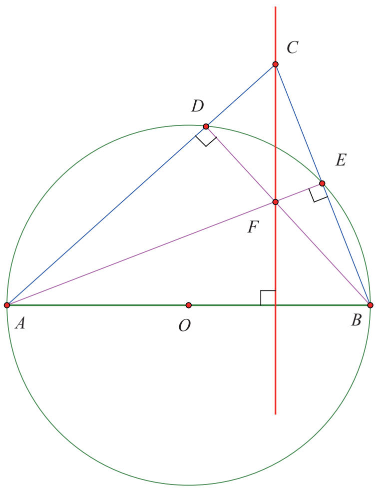


图 7-2-4

1）垂足在圆内

已知⊙*O*，圆心为 *O*，*AB* 为直径，*C* 为圆外一点，单尺求作过 *C* 点 *AB* 的垂线。

作法：

（1）连结 *AC*，交⊙*O* 于点 *D*。

（2）连结 *CB*，交⊙*O* 于点 *E*。

（3）连结 *BD*、*AE*，交点为 *F*。

（4）作直线 *CF*，则 *CF*⊥*AB*。

此做法所用的原理非常简单，两个半圆的圆心角等于 90°，那么很明显，*F* 是△*ABC* 的垂心，于是 *CF* 也必然与 *AB* 垂直。

2）垂足在圆外

已知 *AB* 和圆外一点 *C*，过点 *C* 作 *AB* 的垂

线的垂足 G 不在圆内时的作法，如图 7-2-5 所示。

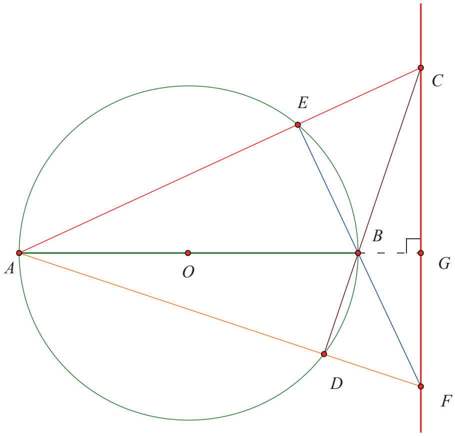


图 7-2-5

情况二：过圆上一点作圆直径的垂线

已知⊙O 的直径 AB，C 点在圆周上，求过 C 点作 AB 的垂线。

作法：

（1）作直线 CO，交⊙O 于点 D，如图 7-2-6 所示。

（2）作直线 AD，在 AD 上任找一点 E。

（3）连结 EO、EB、BD，BD 与 EO 交于点 F。

（4）作直线 AF，与 BE 交于点 G。

（5）作直线 DG，与⊙O 交于点 H。

（6）作直线 CH，则 $CH \perp AB$。

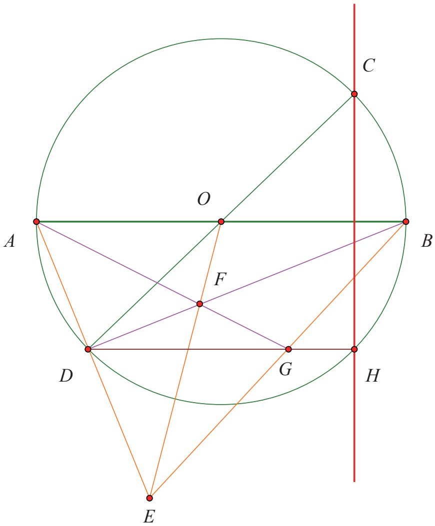


图 7-2-6

情况三：过圆内一点作圆直径的垂线

已知⊙O 的直径 AB，C 为圆内一点，求过点 C 作 AB 的垂线。

作法：

（1）作直线 AC，交⊙O 于点 D，如图 7-2-7 所示。

（2）作直线 BC，交⊙O 于点 E。

（3）作直线 AE、BD，交点为 F。

（4）作直线 CF，则 $CF \perp AB$。

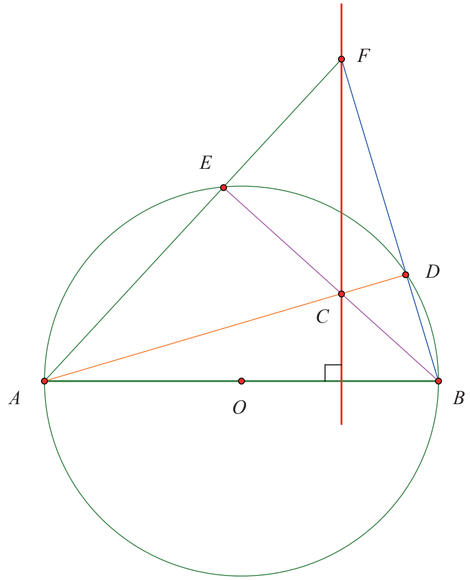


图 7-2-7

情况四：过圆直径上一点作圆直径的垂线

已知⊙O 的直径 AB，AB 上一点 C，求过点 C 作 AB 的垂线。

作法：

（1）在⊙O 外任取一点 D，如图 7-2-8 所示。

（2）过 D 点作出 AB 的垂线 DF，与⊙O 交于 E、F 两点，垂足为 G。

（3）作直线 EC，在 EC 上任取一点 H。

（4）连结 HG、FC，交点为 J。

（5）连结 HF。

（6）作直线 EJ，与 HF 交于点 K。

（7）作直线 CK，则 $CK \perp AB$。

注意：C 点在直径所在的直线上的任意位置，作法均与此类似。

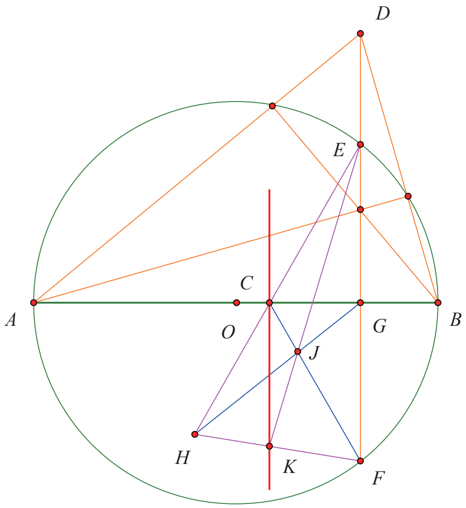


图 7-2-8

5．求作角平分线

已知⊙O 和∠BAC，求作∠BAC 的角平分线。

作法：

将角的两条边平行移动，使角的顶点在圆心，然后再进行平分，如图 7-2-9 所示，具体过程略。

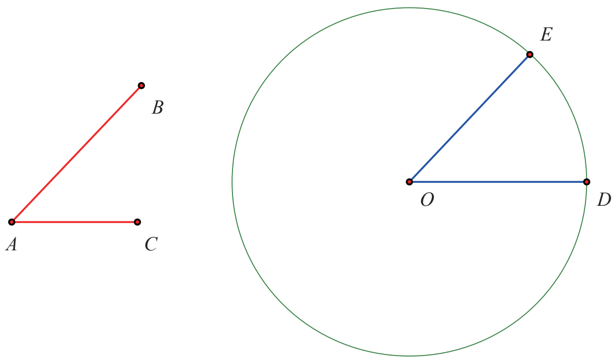


图 7-2-9

6. 作圆的切线

下面作图时用不需要作垂线的办法作切线，是一种比较简洁的解法。

已知⊙O 及其圆心 O 点，圆外一点 A，单尺求作过 A 点⊙O 的切线。

作法：

（1）作直线 AO，交⊙O 于 B、C 两点，如图 7-2-10 所示。

（2）在⊙O 上任取两点 D、E。

（3）连结 AD，交⊙O 于点 F。

（4）连结 AE，交⊙O 于点 G。

（5）连结 CD、BF，交点为 J。

（6）连结 BG、EC，交点为 K。

（7）作直线 JK，交⊙O 于 M、N 两点。

（8）作直线 AM、AN，则 AM 和 AN 分别为⊙O 过 A 点的两条切线。

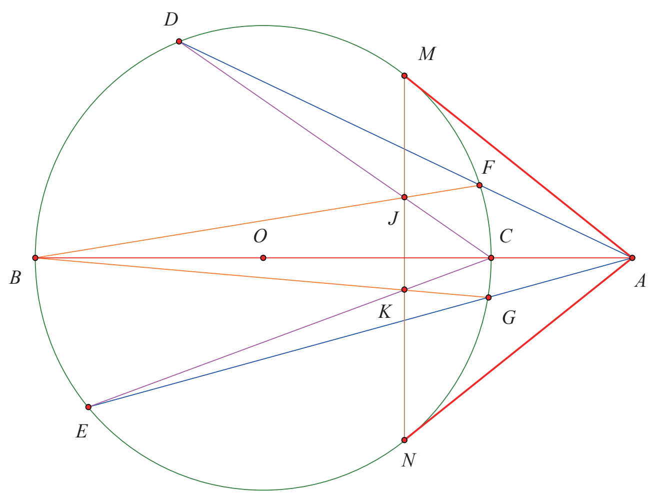


图 7-2-10

7．任意延长线段

下面以延长线段一倍为例（如图 7-2-11 所示），只要反复重复作图步骤，就可以任意延长线段。

已知线段 AB 及直线 CD，且 $CD // AB$，求单尺延长线段 AB 一倍。

作法：

（1）任取一点 E。

（2）连结 AE，交 CD 于点 F；连结 BE，交 CD 于点 G。

（3）连结 AG、BF，交点为 H。

（4）连结 EH，交 CD 于点 J。

（5）作直线 BJ，交 AE 于点 K。

（6）作直线 KG，交 AB 的延长线于点 L，则 A、B、L 共线，且 $AB=BL$，则 BL 为所作延长线段。

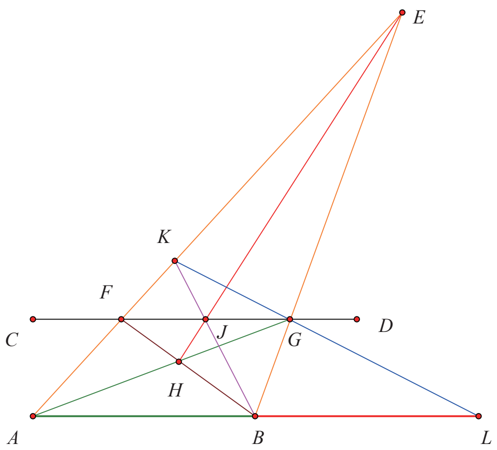


图 7-2-11

8．任意等分线段

已知线段 AB，$CD // AB$，求单尺作出 AB 的任意等分点。

说明：运用平行线等分线段原理可以作出线段任意等分点，但那样作图步骤太多，下面是一种简便的作法。

作法：

（1）任取一点 E，如图 7-2-12 所示。

（2）连结 AE，交 CD 于点 F；连结 BE，交 CD 于点 G。

（3）连结 AG、BF，交点为 H。

（4）作直线 EH，与 AB 的交点为 1/2 点。

（5）反复与 F 点连线，反复作过 E 点的直线，得到 AB 的任意等分点。

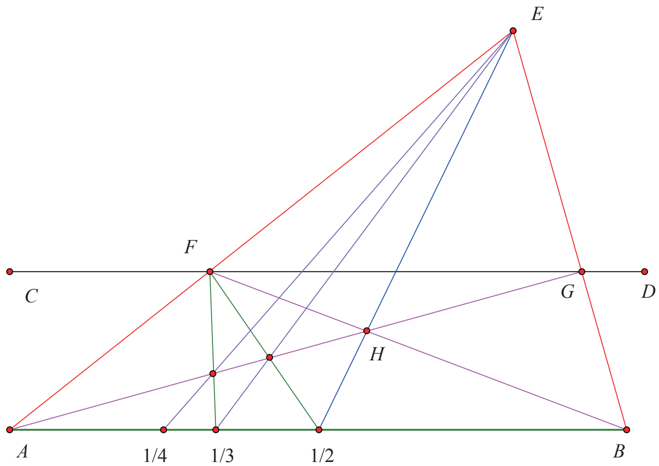


图 7-2-12

9. 在圆周上截取弦等于已知线段

如果没有指定圆周上某一点为弦的端点，作图就比较简单，可以用反复作平行线的方法在圆上截取指定长度的弦。下面是指定圆周上一点为端点，在圆周上截取弦等于已知线段的作法，如图 7-2-13 所示。

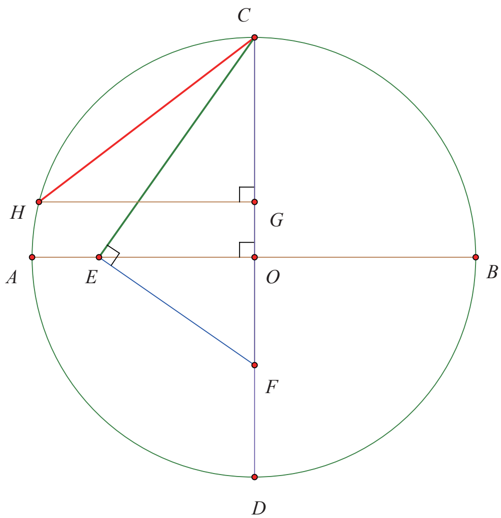


图 7-2-13

已知⊙O，圆心为 O 点，直径 $AB \perp CD$，E 为 AB 上一点。求单尺作一线段等于 CE，并且其中一个端点为 C 点，另一个端点在圆周上。

作法：

（1）过 E 点作 CE 的垂线，与 CE 交于 F 点。

（2）作 CF 的中点 G。

（3）过 G 点作 CD 的垂线，交⊙O 于点 H，则 $CH=CE$，HC 为所作线段。

10．开平方

已知平面上有一单位圆⊙O，$AO=1$ 和线段 BO，求作 $\sqrt{BO}$。

作法：

（1）作 AB 的中点 C，如图 7-2-14 所示。

（2）在过 O 点且垂直于 AB 的垂线上截取 $OD=BC$，$OE=AO=1$。

（3）连结 CD，过 E 点作 CD 的平行线，交 AB 于点 F。

（4）过 F 点作 AB 的垂线，交⊙O 于点 G。

（5）过 G 点作 AB 的平行线，交 OD 于点 H。

（6）连结 HF。

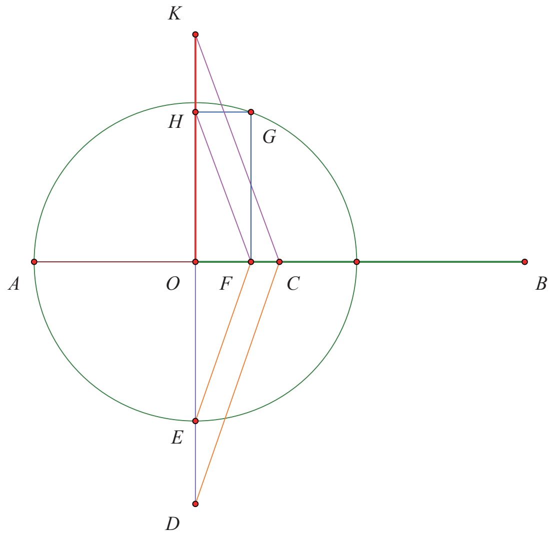


图 7-2-14

（7）过 C 点作 HF 的平行线，交 OD 于点 K，则 $OK=\sqrt{BO}$。

第三节

正多边形作图

1．正三角形

已知⊙O，半径为 AO，单尺作出等边三角形。

作法：

（1）作直线 AO，交⊙O 于 C 点，如图 7-3-1 所示。

（2）在圆外任取一点 B，连结 BC，交⊙O 于 D 点。

（3）连结 AB，交⊙O 于 E 点。

（4）连结 AD，CE，交点为 F。

（5）作直线 BF，交⊙O 于 G、H 两点，交 AO 于 J 点。

（6）作直线 GO，交⊙O 于 K 点。

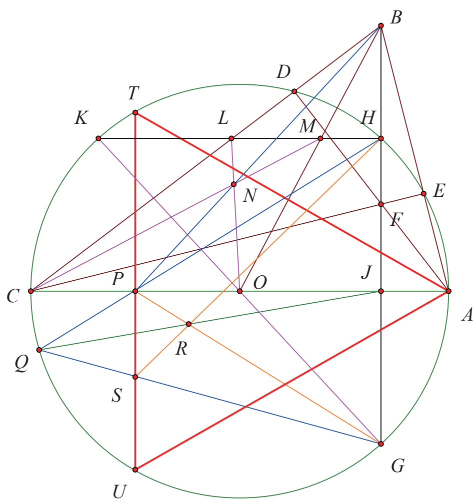


图 7-3-1

（7）连结 HK，交 BC 于 L 点。

（8）连结 BO，交 HK 于 M 点。

（9）连结 LO、MC，交点为 N。

（10）作直线 BN，交 CO 于 P 点。

（11）作直线 HP，交⊙O 于 Q 点。

（12）连结 QG。

（13）连结 QJ、PG，交点为 R。

（14）作直线 HR，交 QG 于 S 点。

（15）作直线 PS，交⊙O 于 T、U 两点。

（16）顺次连结 A、T、U 三点，则△ATU 为等边三角形。

2. 正方形

已知⊙O 及其圆心 O 点，单尺作出正方形。

（1）作⊙O 的直径 BC，如图 7-3-2 所示。

（2）在⊙O 外任取一点 A，连结 AB，交⊙O 于点 D，连结 AC，交⊙O 于点 E。

（3）连结 CD、BE，交点为 F。

（4）作直线 AF，交⊙O 于 G、H 两点，交 BC 于点 J。

（5）作直线 HO，交⊙O 于点 K。

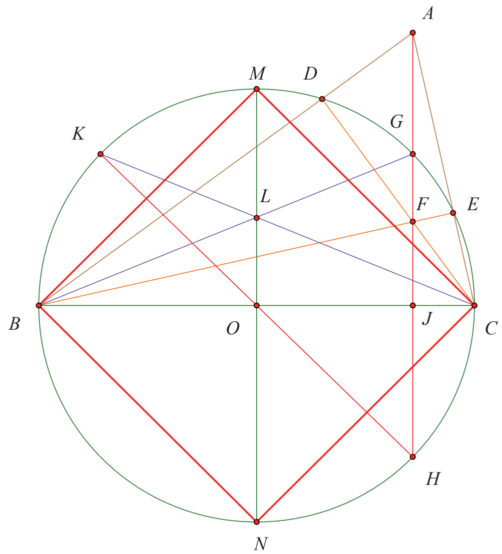


图 7-3-2

（6）连结 KC、BG，交点为 L。

（7）作直线 OL，交⊙O 于 M、N 两点。

（8）顺次连结 M、B、N、C 四点作出正方形。

3. 正五边形

已知⊙O 及其圆心 O 点，单尺求作其内接正五边形。

解法一：

说明：具体步骤非常繁琐，但原理却不复杂，如图 7-3-3 所示。

原理：

（1）作两条垂直直径，$AB \perp CD$。

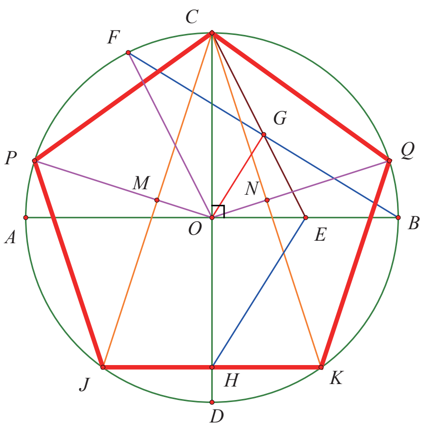


图 7-3-3

（2）作 BO 的中点 E。

（3）过 O 点作 CE 的平行线，与⊙O 的交点为 F。

（4）连结 BF，与 CE 的交点为 G。

（5）作直线 GO。

（6）过 E 点作 GO 的平行线，与 CD 的交点为 H。

（7）过 H 点作 CD 的垂线，与⊙O 交于 J、K 两点。

（8）连结 CJ 并作其中点 M。

（9）连结 CK 并作其中点 N。

（10）作直线 MO，与⊙O 交于 P 点。

（11）作直线 NO，与⊙O 交于 Q 点。顺次连结 C、P、J、K、Q 作出正五边形。

原理不复杂，但用直尺作图实现，图形非常复杂，如图 7-3-4 所示是完整作图过程。

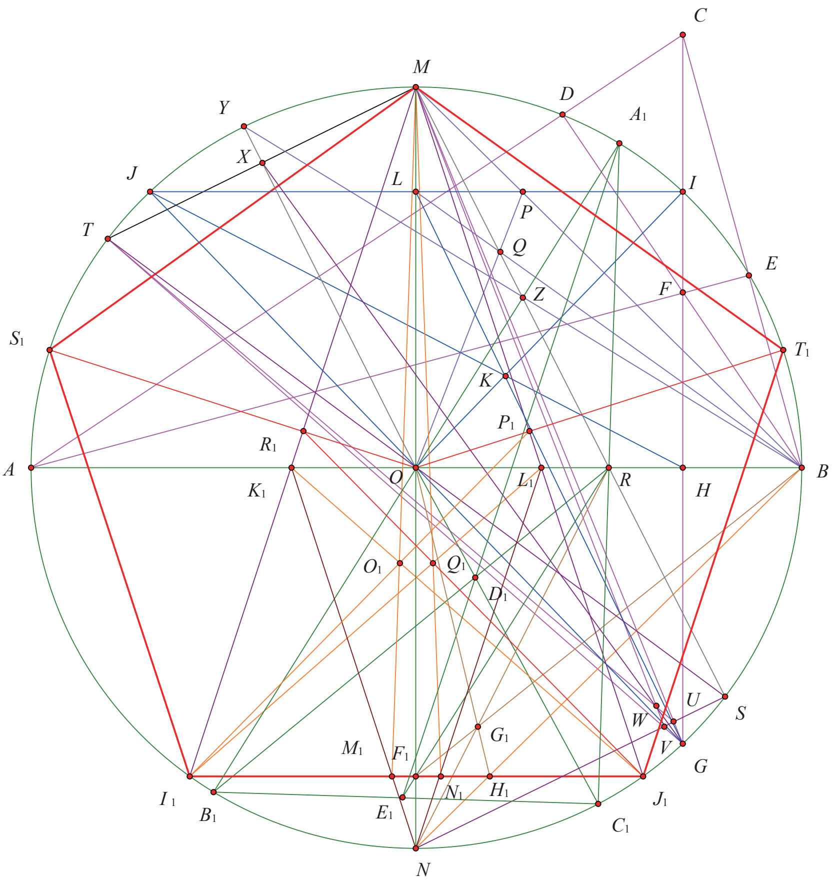


图 7-3-4

作法：

（1）作直径 AB。

（2）在圆外任取一点 C。连结 AC、BC，与⊙O 分别交于点 D、E。

（3）连结 AE、BD，交点为 F。

（4）作直线 CF，交 AB 于点 H，交⊙O 于 G、I 两点。

（5）作直线 GO，交⊙O 于点 J。

（6）连结 JI。

（7）连结 JH、OI，交点为 K。

（8）作直线 GK，交 JI 于点 L。

（9）作直线 OL，交⊙O 于 M、N 两点。

（10）连结 BM，交 JI 于点 P。

（11）连结 PO、LB，交点为 Q。

（12）作直线 MQ，交 AB 于点 R，交⊙O 于点 S。

（13）作直线 SO，交⊙O 于点 T。

（14）连结 SN、TM。

（15）连结 MG，交 SN 于点 U。

（16）连结 TG，交 SN 于点 V。

（17）连结 UT、VM，交点为 W。

（18）作直线 GW，交 MT 于点 X。

（19）作直线 XO，交⊙O 于点 Y。

（20）连结 BY，与 MR 交于点 Z。

（21）作直线 AO，交⊙O 于 A_1、B_1 两点。

（22）作直线 A_1R，交⊙O 于点 C_1。

（23）连结 B_1C_1。

（24）连结 C_1O、B_1R，交点为 D_1。

（25）作直线 A_1D_1，交 B_1C_1 于点 E_1。

（26）连结 E_1R，交 MN 于点 F_1。

（27）连结 F_1B、NR，交点为 G_1。

（28）连结 NB。

（29）作直线 OG_1，交 NB 于点 H_1。

（30）作直线 F_1H_1，交⊙O 于 I_1、J_1 两点。

（31）连结 I_1M，交 AB 于点 K_1。

（32）连结 J_1M，交 AB 于点 L_1。

（33）连结 K_1N，交 I_1J_1 于点 M_1。

（34）连结 L_1N，交 I_1J_1 于点 N_1。

（35）连结 K_1J、MF_1，交点为 O_1。

（36）作直线 I_1O_1，交 MJ_1 于点 P_1。
（37）连结 I_1L_1、MN_1，交点为 Q_1。
（38）作直线 J_1Q_1，交 I_1B 于点 R_1。
（39）作直线 OR_1，交⊙O 于点 S_1。
（40）作直线 OP_1，交⊙O 于点 T_1。
（41）顺次连结 M、S_1、I_1、J_1、T_1，作出正五边形。

除去已知⊙O，后续作图包括连结五条边（只需再作出四条边，因为 I_1J_1 在前面已经作出），共计 53 步。

解法二：

从解法一可以看出，单尺作图作正五边形，不能照搬尺规作图的那些作法，要想简化作法，必须另辟蹊径，下面是笔者找到的一种比较简洁的作法。

分析：将多边形的边长转换成若干个二次方程，就可以很方便地仅用直尺作出二次方程的根。

原理（莫海亮方法）：

（1）作⊙O 的两条垂直直径 $AO \perp BO$，如图 7-3-5 所示。

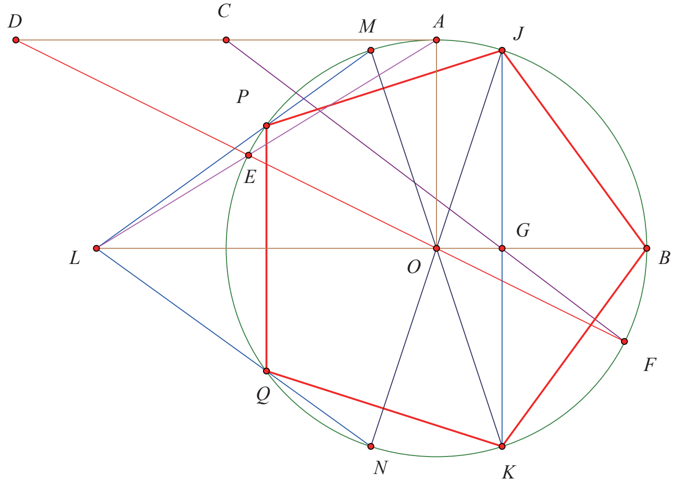


图 7-3-5

（2）过 A 点作 AO 的垂线，并在垂线上截取 $AC=CD=AO$。
（3）作直线 DO，交⊙O 于 E、F 两点。
（4）连结 FC，交 OB 于点 G。
（5）过 G 点作 AO 的平行线，交⊙O 于 J、K 两点。
（6）作直线 JO，交⊙O 于点 N；作直线 KO，交⊙O 于点 M。
（7）作直线 AE，交 BO 于点 L。
（8）连结 LM，交⊙O 于点 P；连结 LN，交⊙O 于点 Q。顺次连结 J、P、Q、K、B，作出正五边形。

作法：

（1）作⊙O 的直径 AB，如图 7-3-6 所示。

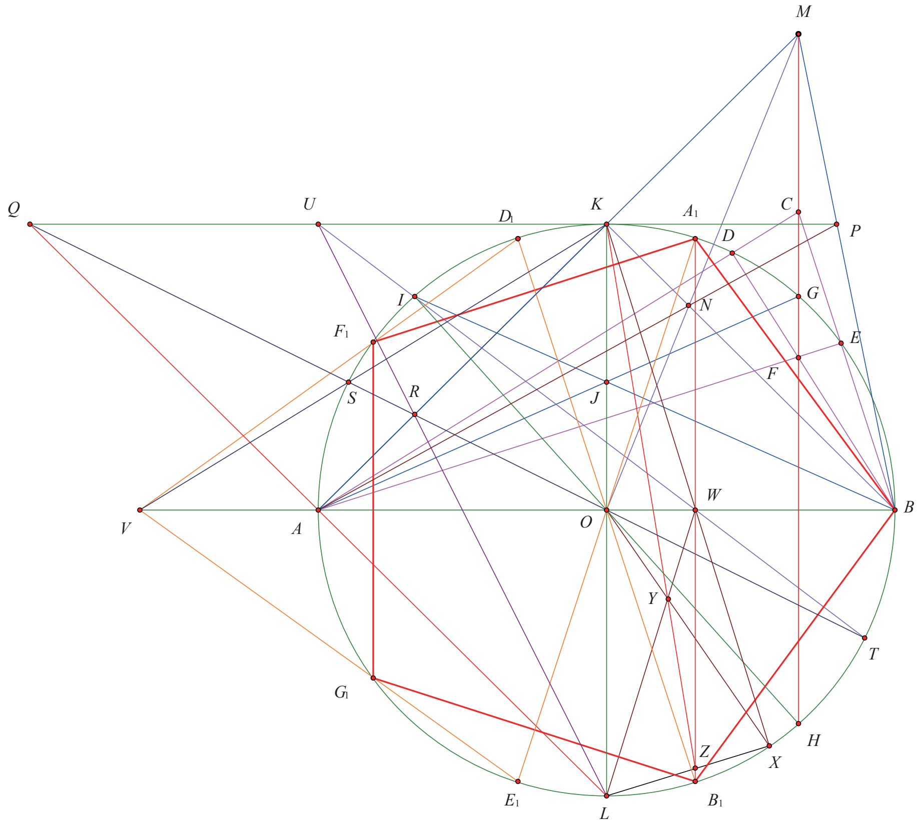


图 7-3-6

（2）在⊙O 外任取一点 C，连结 AC，交⊙O 于点 D。

（3）连结 CB，交⊙O 于点 E。

（4）连结 BD、AE，交点为 F。

（5）作直线 CF，交⊙O 于 G、H 两点。

（6）作直线 HO，交⊙O 于点 I。

（7）连结 BI、AG，交点为 J。

（8）作直线 OJ，交⊙O 于 K、L 两点。

（9）作直线 AK，交 CF 于点 M。

（10）连结 MB。

（11）连结 MO、KB，交点为 N。

（12）作直线 AN，交 MB 于点 P。

（13）作直线 KP。

（14）作直线 AL，交 KP 于点 Q。

（15）作直线 QO，交 AK 于点 R，交⊙O 于 S、T 两点。
（16）作直线 LR，交 QK 于点 U。
（17）作直线 KS，交 AB 于点 V。
（18）连结 UT，交 AB 于点 W。
（19）作直线 KW，交⊙O 于点 X。
（20）连结 LX。
（21）连结 OX、LW，交点为 Y。
（22）作直线 KY，交 LX 于点 Z。
（23）作直线 WZ，交⊙O 于 A_1、B_1 两点。
（24）作直线 OB_1，交⊙O 于点 D_1。
（25）作直线 $OA1$，交⊙O 于点 E_1。
（26）连结 VD_1，交⊙O 于点 F_1。
（27）连结 VE_1，交⊙O 于点 G_1。
（28）顺次连结 F_1、G_1、B_1、B、A_1，作出正五边形。
包括连结 5 条边，共计 35 步，单尺作出正五边形的最简作法。

4．正六边形

已知圆 O，半径为 AO，单尺作出正六边形。
作法：
（1）作直线 AO，交⊙O 于 C 点，如图 7-3-7 所示。
（2）在圆外任取一点 B，连结 BC，交⊙O 于 D 点。

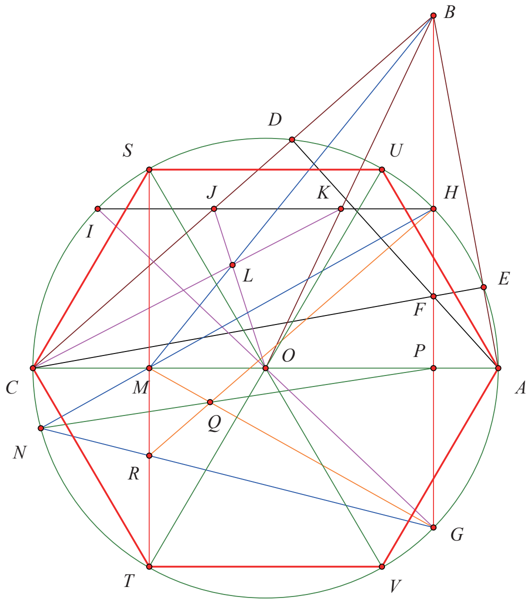


图 7-3-7

（3）连结 AB，交⊙O 于 E 点。
（4）连结 AD、CE，交点为 F。
（5）作直线 BF，交⊙O 于 G、H 两点，交 AO 于 P 点。
（6）作直线 GO，交⊙O 于 I 点。
（7）连结 HI，交 BC 于 J 点。
（8）连结 BO，交 HI 于 K 点。
（9）连结 CK、JO，交点为 L。
（10）作直线 BL，交 CO 于 M 点。
（11）作直线 HM，交⊙O 于 N 点。
（12）连结 NG。
（13）连结 MG、NP，交点为 Q。

（14）作直线 HQ，交 NG 于 R 点。

（15）作直线 MR，交⊙O 于 S、T 两点。

（16）作直线 TO，交⊙O 于 U 点。

（17）作直线 SO，交⊙O 于 V 点。

（18）顺次连结 S、U、A、V、T、C，则 $SUAVTC$ 为正六边形。

5. 正八边形

已知⊙O 及其圆心 O，单尺求作正八边形。

作法：

（1）在⊙O 外任取一点 C，连结 AC，交⊙O 于点 D，连结 BC，交⊙O 于点 E，如图 7-3-8 所示。

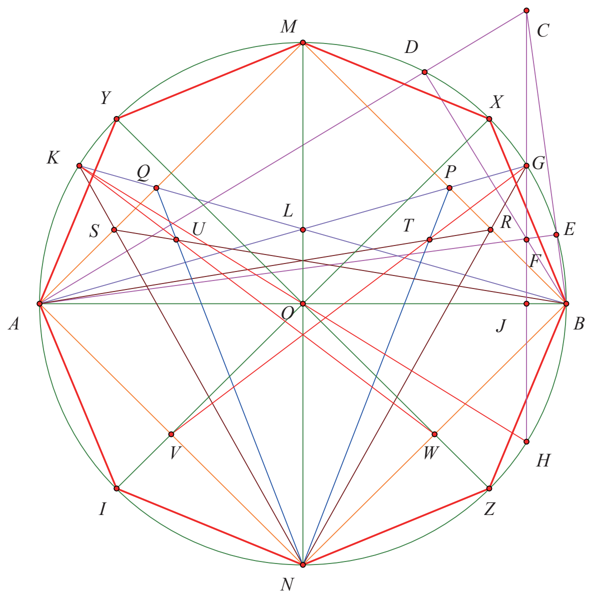


图 7-3-8

（2）连结 AE、BD，交点为 F。

（3）作直线 CF，交⊙O 于 G、H 两点，交 AB 于点 J。

（4）作直线 OH，交⊙O 于点 K。

（5）连结 BK、AG，交点为 L。

（6）作直线 OL，交⊙O 于 M、N 两点。

（7）连结 BM，交 AG 于点 P。

（8）连结 AM，交 BK 于点 Q。

（9）连结 AN、BN。

（10）连结 GN，交 MB 于点 R。

（11）连结 KN，交 AM 于点 S。

（12）连结 *PN*、*AR*，交点为 *T*。

（13）连结 *SB*、*QN*，交点为 *U*。

（14）作直线 *GT*，交 *AN* 于点 *V*。

（15）作直线 *KU*，交 *BN* 于点 *W*。

（16）作直线 *OV*，交⊙*O* 于 *X*、*I* 两点。

（17）作直线 *OW*，交⊙*O* 于 *Y*、*Z* 两点。

（18）顺次连结 *M*、*Y*、*A*、*I*、*N*、*Z*、*B*、*X* 作出正八边形。

6. 正十边形

正十边形作图原理和正五边形作图原理相近，作图过程比正五边形作图过程稍复杂一点，作图原理如图 7-3-9 所示，具体作图过程略。

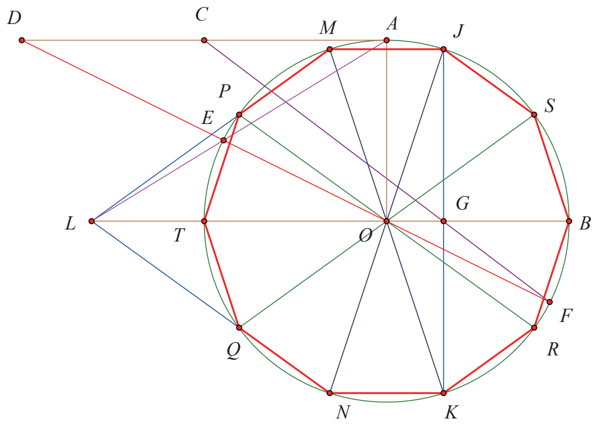


图 7-3-9

已知⊙*O* 及其圆心 *O* 点，求单尺作正十边形。

作法：

（1）作⊙*O* 的两条垂直直径 $AO \perp BO$。

（2）过 *A* 点作 *AO* 的垂线，并在垂线上截取 $AC=CD=AO$。

（3）作直线 *DO*，交⊙*O* 于 *E*、*F* 两点。

（4）连结 *FC*，交 *OB* 于点 *G*。

（5）过 *G* 点作 *AO* 的平行线，交⊙*O* 于 *J*、*K* 两点。

（6）作直线 *JO*，交⊙*O* 于点 *N*；作直线 *KO*，交⊙*O* 于点 *M*。

（7）作直线 *AE*，交 *BO* 于点 *L*。

（8）连结 *LM*，交⊙*O* 于点 *P*；连结 *LN*，交⊙*O* 于点 *Q*。

（9）作直线 *PO*，交⊙*O* 于点 *R*。

（10）作直线 *QO*，交⊙*O* 于点 *S*。则多边形 *JSBRKNQTP* 为正十边形。

7. 正十七边形

正十二边形、十五边形、十六边形单尺作图原理和前面正多边形作图原理差

不多，这里不再重复，下面直接介绍正十七边形单尺作图，如图 7-3-10 所示。

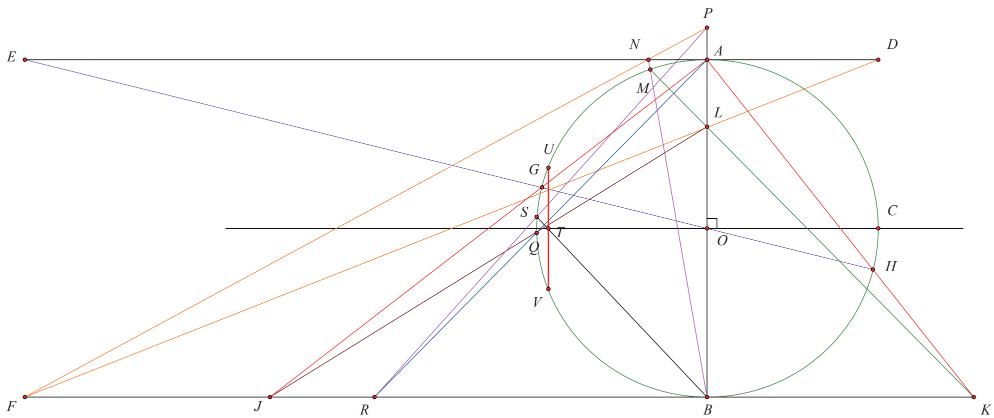


图 7-3-10

已知⊙O 及其圆心 O 点，求单尺作出正十七边形。

原理：单尺作正十七边形比单尺作正五边形复杂得多，将正十七边形的高次方程化成四个二次方程，然后逐一用单尺作图求解方程。

作法：

（1）作出⊙O 的两条垂直直径 $AB \perp OC$。

（2）分别过 A、B 两点作 AB 的垂线，并截取 $AD=AO$，$AE=BF=4AO$。

（3）作直线 EO，交⊙O 于 G、H 两点。作直线 AG，交 BF 于点 J；作直线 AH，交 BF 于点 K。

（4）连结 FD，交 AB 于点 L。

（5）作直线 KL，交⊙O 于点 M；作直线 BM，交 AE 于点 N；作直线 FN，交 AB 于点 P。

（6）连结 JL，交⊙O 于点 Q（Q 点不在 OC 线上）；作直线 AQ，交 BF 于点 R；连结 RP，交⊙O 于点 S。

（7）连结 SB，交 OC 于点 T；过 T 点作 CO 的垂线，交⊙O 于 U、V 两点，则 $UV=2\sin\dfrac{2\pi}{17}OC$，也就是说，$U$、$V$ 是间隔了一个顶点的正十七边形的两个顶点。

截取规定长度的线段和作垂线都是单尺能够完成的，这里已经作出了两个顶点，剩余顶点的作图原理就很简单了，所以整个过程用单尺可以作出。不过如果真的全部只用直尺作出，线条极为复杂，图形蔚为壮观。

第八章 锈规作图

一般情况下，圆规都是金属制品，圆规如果长期没有使用，加上保养不当就可能存在生锈问题。于是一把两脚不能自由张合，只能作出固定大小圆的圆规被形象地称之为“生锈的圆规”。

圆规如果生锈太厉害了，我们一般的处理方式就是直接丢弃，但数学家却琢磨起用它如何解决几何作图问题，数学家的脑筋就是与众不同！这样的一把圆规非常不好使，即使用它来解决一些原本非常简单的作图问题，也会令人大伤脑筋。

很长时间里，人们能用锈规解决的作图问题少得可怜，基本可以说是束手无策。在 20 世纪末期，中国人改变了这个局面，锈规作图研究获得极大进展，原来锈规作图也是一片广阔的天地！从此锈规作图在尺规作图领域大放异彩。

中国人得到的锈规作图成果非常丰富，令人惊叹，但锈规作图问题至今还未完全得到解决，锈规作图是否与尺规作图等价？这个问题仍需人们继续努力。

锈规作图的推理分析过程非常复杂，作图过程极其繁琐，本章只挑选一些比较简单的作图问题讲解。

第一节

基础知识

锈规作图定义

只用一把两脚开口固定，只能作出固定大小圆的圆规来解决平面几何作图问题，就叫“锈规作图”或“定规作图”。

为了作出指定长度的线段，于是规定锈规作出的圆的半径长度等于 1，所以锈规作图也叫“单位定规作图”。

从已知两点出发，锈规作图与尺规作图等价

从已知的 A、B 两点出发，尺规可以作出的所有点，锈规都可以作出；反过来，从已知的 A、B 两点出发，锈规只能作出尺规能够作出的所有点。也就是说，从两点出发，锈规作图与尺规作图等价。至于对于所有作图问题，锈规作图是否与尺规作图等价，目前尚不清楚。

锈规作图历史

从 15 世纪到 17 世纪，许多数学家都研究过用直尺和开口固定的圆规作正多边形的方法，这时已经有了锈规作图的思想雏形。

1673 年，丹麦人摩尔证明：用直尺和开口固定的圆规作图（即“直尺定规作图”）与尺规作图等价，这是对锈规作图思想的进一步发展。

1759 年，德国数学家兰伯特（J.H.Lambert，1728—1777）在他的数学专著中解决了作图问题：给一个定圆及其圆心，只用直尺能作尺规作图可以办到的一切作图问题。1833 年，瑞士数学家施泰纳对这个问题给出了比较完整的论证。

那么，如果没有直尺帮忙，只用一把锈规的作图又如何呢？大家觉得没什么文章可作，于是这个问题被冷落了 150 多年。

美国的几何学家年逾七旬的老教授丹·佩多（Daniel Pedoe）独具慧眼，于 1979 年和 1982 年提出了两个问题，发表在加拿大一份国际杂志《数学难题》（*Crux* 问题）上，向数学家和数学爱好者们征求答案：

（1）已知 A、B 两点，只用一把仅能作出半径为 1 的圆的圆规，能不能作出点 C，使△ABC 是正三角形？（A、B 两点间没有连线，1979 年提出）

（2）已知 A、B 两点，只用一把仅能作出半径为 1 的圆的圆规，能不能作出 AB 的中点 M？（A、B 两点间没有连线，1982 年提出）

对佩多的第一个问题，当 $AB\leqslant 2$ 时，佩多和他的学生很快就解决了。但对于 $AB>2$ 时，从问题提出，几年过去了仍然找不到解决方法。当时数学家们猜测，这也许是个“不可能”的作图问题。

1983 年，中国数学工作者单墫、张景中、杨路(当时三人都在中国科技大学任教)用几种不同的作图方法解决了这一问题，答案是：能作出！

对佩多的第二个问题，中国一位只上过高中的 22 岁自学青年侯晓荣研究了一年，1985 年用代数方法成功解决了这个被不少数学家称为无从下手的难题，答案也是能作出！论文《锈规作图论》发表在中国科技大学学报上。张景中和杨路根据侯晓荣的理论，给出了一个较为简洁的作图方法。

侯晓荣用代数方法同时还证明：从 A、B 两点出发，锈规作图与尺规作图等价！这一结果令人吃惊，于是锈规作图不仅可以作出 A、B 间的中点，还可以作出 A、B 间的任意等分点，作出正 5 边形、正 17 边形甚至是正 257 边形、正 65537 边形等。这几位中国人的成果，后来刊登在国际期刊《几何学报》上。锈规作图工具极为笨拙，大家原以为用锈规可以解决的作图问题极为有限，侯晓荣这一结果大大出乎人们的意料。从此，在尺规作图领域一直鲜有作为的中国人也留下了光辉的一页。

第二节 基本作图

1．作等边三角形

情况一：对于已知的 A、B 两点，$AB<2$

已知平面上 A、B 两点（$AB<2$），求锈规作图作第三点，使得三点构成等边三角形的三个顶点。

解法一：

作法：

（1）分别以 A、B 为圆心作圆，交于点 C，如图 8-2-1 所示。

（2）以 C 点为圆心作圆，分别交⊙A、⊙B 于 D、E 两点。

（3）分别以 D、E 为圆心作圆，交点为 F，则 $\triangle ABF$ 是等边三角形，点 F 为所作等边三角形第三点。

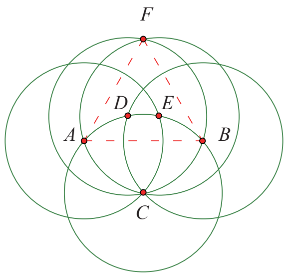


图 8-2-1

解法二：

作法：

（1）分别以 A、B 为圆心作圆，交点为 C，如图 8-2-2 所示。

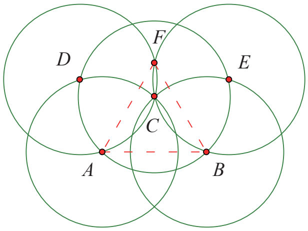


图 8-2-2

（2）以 C 点为圆心作圆，交⊙A、⊙B 于 D、E 两点。

（3）分别以 D、E 点为圆心作圆，交点为 F，则 $\triangle ABF$ 为等边三角形，点 F 为所作等边三角形第三点。

解法三：

作法：

（1）分别以 A、B 为圆心作圆，交于 C、D 两点，如图 8-2-3 所示。

（2）以 D 点为圆心作圆，交⊙A 于点 E。

（3）以 C 点为圆心作圆，交⊙A 于点 F。

（4）分别以 E、F 为圆心作圆，交点为 G，则 $\triangle ABG$ 为等边三角形，点 G 为所作等边三角形第三点。

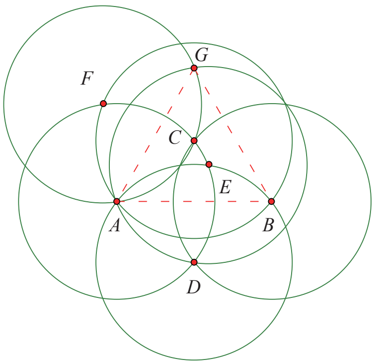


图 8-2-3

解法四：

作法：

（1）分别以 A、B 为圆心作圆，交点为 C，如图 8-2-4 所示。

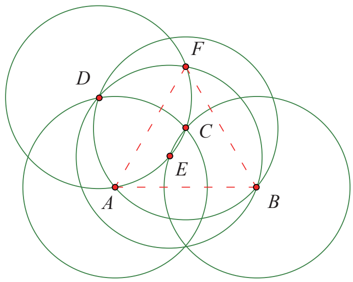


图 8-2-4

（2）以 C 点为圆心作圆，交⊙A 于点 D。

（3）以 D 点为圆心作圆，交⊙B 于点 E。

（4）以 E 点为圆心作圆，交⊙D 于点 F，△ABF 为等边三角形，点 F 为所作等边三角形第三点。

情况二：对于已知的 A、B 两点，$AB \geqslant 2$

已知平面上 A、B 两点（$AB \geq 2$），求作第三点，使这三点构成等边三角形。

作法：

（1）任取一点 C，作等边三角形△ADC、△BCE，如图 8-2-5 所示。

（2）作等边三角形△CBE、△CDF。

（3）作等边三角形△FGH，则△ABH 是等边三角形，点 H 为所作等边三角形第三点。

（上面作等边三角形的作法，参考 $AB<2$ 时等边三角形的作法。）

问：若任取的 C 点，AC 仍大于 2 又如何呢？

答：在 AC 之间再任取一点，重复上面的步骤可以作出点 D，余下作图过程和上面的一样。所以不管 AB 的长度多长，只要不断嵌套上面作图方法，最终都可以作出 H 点，使得△ABH 是等边三角形。

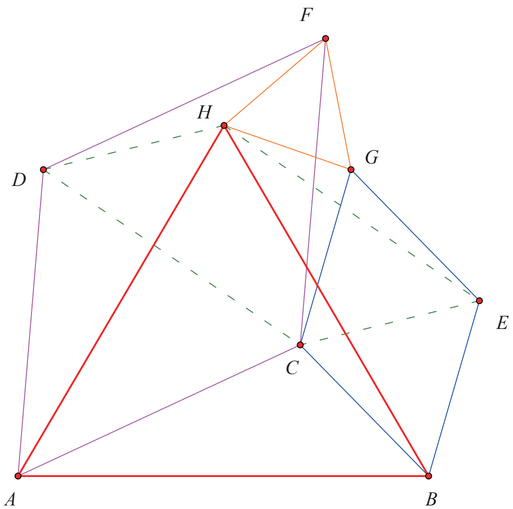


图 8-2-5

2．任意延长线段

已知 A、B 两点，求延长 AB 长度的 n 倍。

作法：

如图 8-2-6 所示，不断作等边三角形，就可以延长 AB 任意多倍。

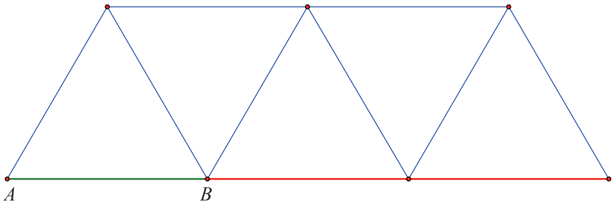


图 8-2-6

3．已知三点作平行四边形

解法一：

已知 A、B、C 三点，求作第四点，使得这四点构成平行四边形。

作法：

如图 8-2-7 所示，分别以 AC、AB 边作等边三角形，得到两个顶点 E、F，再以 EF 边作等边三角形，得到顶点 D，则四边形 $ABCD$ 必定是平行四边形。

由前面我们知道，任意长度的等边三角形都可以作出，所以这里不管 AC、AB 的长度等于多少，D 点也可以作出。

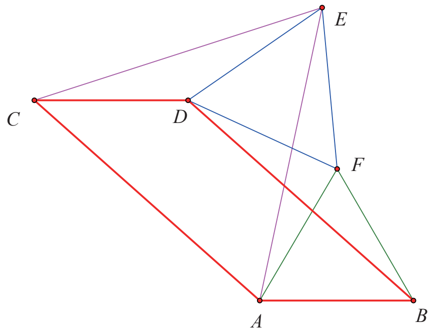


图 8-2-7

解法二：

解法一的原理比较简单，但对于大尺度的平行四边形，为了作出大尺度的等边三角形，需要嵌套的等边三角形会比较多，作图比较繁琐，下面是另一种平行四边形的作法，比较适用大尺度平行四边形锈规作图。

1）已知 A、B、C 三点，并且 $AB=AC=1$，求作第四点，使之与 A、B、C 三点构成平行四边形，如图 8-2-8 所示。

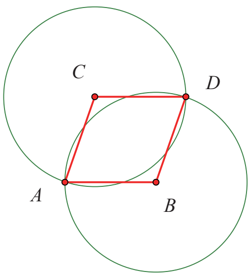


图 8-2-8

作法：

分别以 B、C 为圆心作单位圆，则交点 D 即为所求第四点。这样的平行四边形也叫单位菱形。

2）已知 A、B、C 三点，$AC=1$，$AB>1$，求作第四点，使之与 A、B、C 三点构成平行四边形。

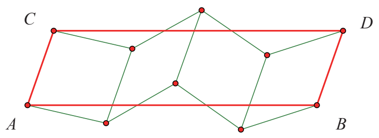


图 8-2-9

作法：

如图 8-2-9 所示，在 *AB* 之间插入若干个单位棱形，最后的 *D* 点与 *A*、*B*、*C* 三点必定构成 $1\times n$ 的平行四边形。

3）已知 *A*、*B*、*C* 三点，$AC>1$，$AB>1$，求作第四点，使之与 *A*、*B*、*C* 三点构成平行四边形的四个顶点。

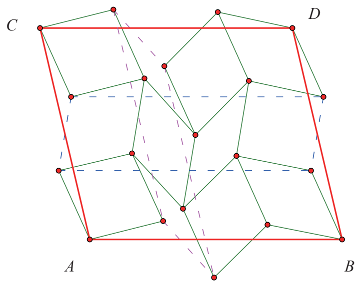


图 8-2-10

作法：

纵向或横向插入若干个有一边等于 1 的平行四边形，最后作出的 *D* 点与 *A*、*B*、*C* 三点构成平行四边形，如图 8-2-10 所示，则 *D* 点为所作平行四边形第四点。

对于解法二，已知 *A*、*B*、*C* 三点，如果 $AC<1$ 且 $AB<1$，平行四边形又该怎么作呢？笔者没见到有关资料介绍。很显然，用解法二解决这个问题虽然可解，但比较复杂，建议这种情况用解法一求解。下面是笔者给出这种情况的解法二的参考解法，如图 8-2-11 所示。

（4）已知 *A*、*B*、*C* 三点，并且 $AC<1$，$AB<1$，求作第四点，使之与 *A*、*B*、*C* 三点构成平行四边形的四个顶点。

解析：为了获得边行都小于 1 的平行四边形，构造不能少于 9 个单位菱形，共 24 条线段。

如图 8-2-11 所示就是 9 个菱形 24 条线段构造。

为了使结构优美，本图作成轴对称图形，最后得出的平行四边形是菱形。若结构不对称，则作出的四边形是一般平行四边形。

里面的单位菱形是怎么分布的呢？把单位菱形想象成在空间里进行折叠，可能会比较容易理解。

可见，当平行四边形边长小于 1 时，用这种作图法非常复杂，远不如平行四边形解法一简洁。

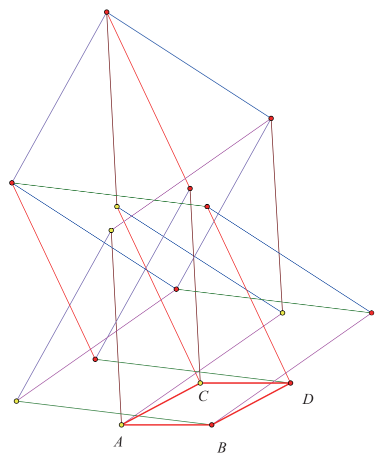


图 8-2-11

4．作两点间中点

1）已知 *A*、*B* 两点，并且 $AB<\dfrac{2}{\sqrt{19}}$，求锈规作 *A*、*B* 两点间中点。

作法：（张景中、杨路根据侯晓荣理论给出的具体作图）

（1）以 AB 长为边反复作出五层正三角形塔，找到 C 点，如图 8-2-12 所示。

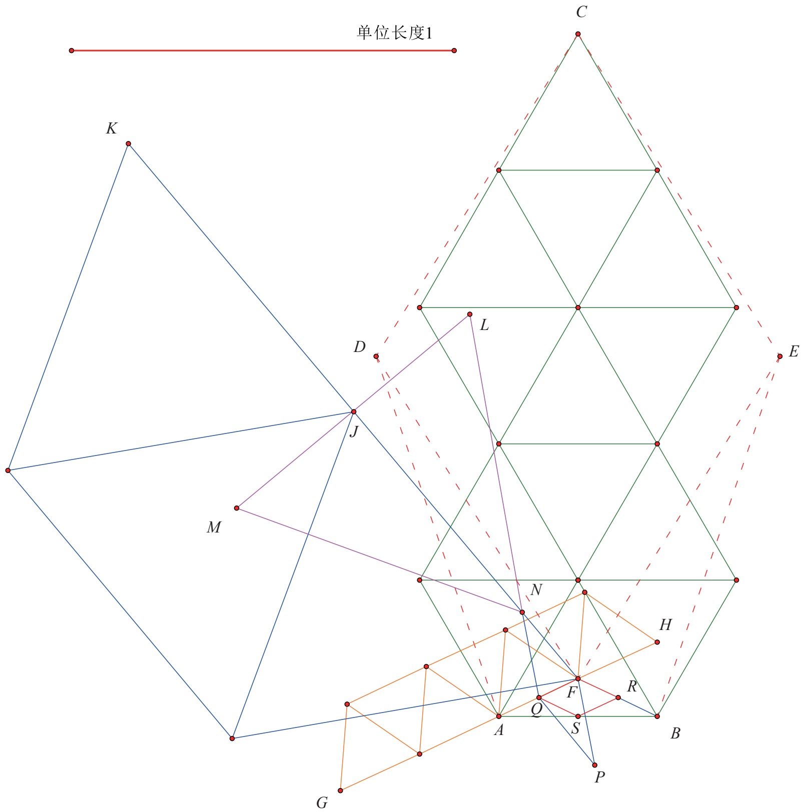


图 8-2-12

（2）以 C 点为圆心作圆。

（3）以 A 点为圆心作圆，交⊙C 于点 D。

（4）以 B 点为圆心作圆，交⊙C 于点 E。

（5）分别以 D、E 点为圆心作圆，交点为 F（此时 $CD=CE=AD=BE=DF=EF=1$）。

（6）以 AF 长为边，作出 7 个等边三角形，使得 $AG=AH=2AF$。

（7）分别以 G、H 为圆心作圆，交点为 J（此时 $GJ=JH=1$）。

（8）以 JF 为正三角形的边，作三个正三角形，得到 K 点。

（9）分别以 K、F 为圆心作圆，交点为 L、M（此时 $KM=KL=FM=FL=1$）。

（10）以 ML 为边作正三角形，作出顶点 N。

（11）选取 GH 轴的另一边，重复上面第（6）~（10）步，作出点 P，此时 P、N 两点关于 GH 轴对称。

（12）已知 N、F、P 三点，作出 Q 点，使得 $NFPQ$ 是平行四边形（此时 Q 点在 AF 线上，并且 Q 点是 AF 的中点）。

（13）重复第（5）～（12）步，在 FB 两点间作出点 R（同样，R 在 AB 线上，并且 R 是 FB 的中点）。

（14）已知 Q、F、R 三点，作出 S 点，使得四边形 $QFRS$ 是平行四边形。则 S 为 AB 的中点，S 点为所作的点。

2）如图 8-2-12 所示，介绍了当 A、B 两点间距离 $AB<\dfrac{2}{\sqrt{19}}$ 时作出两点间中点的方法，若给出的 $AB>\dfrac{2}{\sqrt{19}}$，又该如何?

已知 A、B 两点，且 $AB>\dfrac{2}{\sqrt{19}}$，求锈规作 A、B 两点间中点。

作法：

（1）任取一点 D，使得 $AD<\dfrac{1}{\sqrt{19}}$。

（2）以 AD 为边作正三角形得到点 F；再以 DF 为边作正三角形得到点 G，则四边形 $ADGF$ 为菱形。

（3）不断重复，做出如图 8-2-13 所示的一张菱形网，使这张网的大小能够包含 B 点。

（4）以 A 点为起始点，隔一个点 F，将点 H 涂上黑色。如此做出若干等距黑点阵。这样，每两个黑点的连线的中点，依旧是菱形网上的网点。

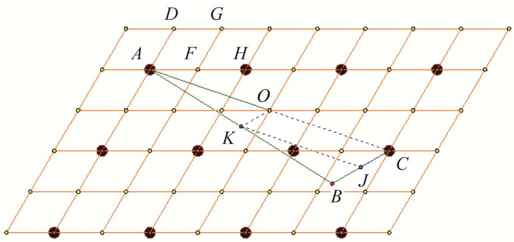


图 8-2-13

（5）因为菱形的边长$<\dfrac{1}{\sqrt{19}}$，故必有黑点 C，使得 $BC<\dfrac{2}{\sqrt{19}}$，找出黑点 C。

（6）对于 A、C 两点，在菱形网点上找到其中点 O。

（7）作出 BC 的中点 J。

（8）已知 O、C、J 三点，作出 K 点，使得四边形 $OCJK$ 是平行四边形，则 K 点为 AB 中点，点 K 为所作的点。

至此，锈规作图作出任意两点间的中点的问题圆满解决。

第九章 其他尺规作图

本章介绍“松动圆规尺规作图”“短尺小规作图”“直尺定规作图”“短尺定规作图”“小规作图”、“短尺作图”六个尺规作图的变种作图。这些种类的作图内容相对比较少，只需要解决关键的少部分作图问题就可以了，其余大部分的作图方法可以参照前八章的作图方法。例如，短尺作图，只需要解决如何用短尺连结两个距离比较远的点，其余的作图与单尺作图相同。

第一节 松动圆规尺规作图

普通的圆规两脚虽然可以自由张合，但如果不对两脚施加外力，两脚是固定不动的。现在假设圆规两脚太松，圆规一脚固定在 A 点为圆心位置，另一脚在 B 点开始，旋转圆规可以作出一个整圆回到 B 点。但是一旦圆规两脚离开平面，即使没有受到外力作用也会发生松动。于是圆规在作任何一个圆时，不能到某处量好长度 R，然后再在另一处作一个半径长等于 R 的圆，因为圆规在离开平面时两脚发生松动，两脚脚尖距离已不是 R 了。这样的一把圆规就叫“松动的圆规”。

圆规两脚发生松动，也许是因为产品质量不好，再加上使用次数频繁而产生机械磨损所致，它与“生锈的圆规”正好相反。

松动圆规尺规作图定义

用一把松动的圆规和一把无刻度直尺来解决平面几何作图问题，就叫作松动圆规尺规作图。

说明：这里用的圆规两脚及直尺的长度都是无限的，和尺规作图里用的尺规一样，只是圆规很容易发生松动。

松动圆规尺规作图和尺规作图等价

由于松动圆规尺规作图和尺规作图所使用的工具种类一样，并且直尺的功能也一模一样，所以只要圆规的功能一样，那么两者的作图能力就等价。

这里只需要解决一个问题：在指定位置，圆规不离平面的情况下作出指定半径大小的圆。这个问题答案是肯定的，作法如图 9-1-1 所示。

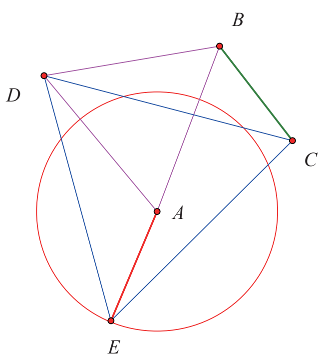


图 9-1-1

已知点 A、B、C，求作以 A 点为圆心，BC 长

为半径的圆。

作法：

（1）分别以 A、B 点为圆心，AB 长为半径作弧，交点为 D。此时 $\triangle ABD$ 是等边三角形。

（2）分别以 D、C 点为圆心，DC 长为半径作弧，交点为 E。此时 $\triangle DEC$ 是等边三角形。

（3）以 A 点为圆心，AE 长为半径作圆，则 $\odot A$ 的半径 $AE=BC$，$\odot A$ 为所作的圆。

第二节 短尺小规作图

尺规作图使用的作图工具大小是无限的，它是理想化的，现实中没有这样的作图工具。短尺小规作图回归到现实，作图工具不再是无限大的，而是两脚可以自由张合但两脚长度有限的圆规和长度有限的无刻度直尺。当已知两点距离超过直尺长度时，就无法直接用直尺连结这两点；当指定半径长度超过圆规两脚跨度上限时，圆规就无法直接作出等于该半径大小的圆。

短尺小规作图定义

作图工具使用有限大小的直尺和圆规，当作图过程中出现无法直接用直尺连结指定的两个点，或无法作出指定半径长度的圆时，就叫做短尺小规作图。

这里需要注意：虽然直尺的长度有限，但我们作出的线段的长度仍旧是不确定的，不能利用直尺的两个端点作出一些长度相等的线段。

短尺小规作图与尺规作图等价

短尺小规作图可以作出尺规作图可以作出的所有点，也只能作出尺规作图可以作出的所有点，短尺小规作图和尺规作图等价。

短直尺虽然无法直接连结长距离的两点，但可以将一条线段任意延长，如果短直尺通过一些方法可以将距离超过短直尺长度的两点连结起来，那么短直尺就和长直尺等价；小圆规虽然无法作出半径长超过圆规两脚跨度上限的圆，但如果小圆规可以作出无限圆规可以作出的所有点，那么小圆规就和无限圆规等价。所以短尺小规作图只要解决了下面两个问题就可以和尺规作图等价了：

（1）连结距离超过直尺长度的两个点；

（2）作出距离超过直尺长度的两个点的中点。

可以连结任意距离的两个点，那么短直尺就等价于无限长的直尺；可以作出距离超过直尺长度的两个点的中点，那么对任意大小的图形就可以按比例缩小到短尺小规可以自由作图的大小范围，作出所求图形后再按比例放大，完成作图。

两个问题具体作图如下：

1）连结长距离的两点

原理——笛沙格定理（Desargues 定理）：若平面上两个三角形的对应顶点的连线共点，则对应边所在的直线的交点共线。

已知 A、B 两点，一把直尺的长度小于 AB 的长，用这把直尺连结 A、B 两点。

作法：

（1）过 A 点作任意直线 AH、AG，如图 9-2-1 所示。

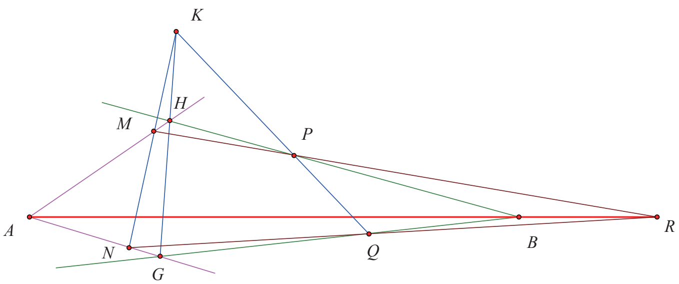


图 9-2-1

（2）过 B 点作任意直线 BH，与 AH 交于 H 点。

（3）过 B 点作任意直线 BG，与 AG 交于 G 点。

（4）连结 GH 并不断延长。

（5）在 GH 上任取一点 K，过 K 点作任意直线，交 AH 于点 M，交 AG 于点 N。

（6）过 K 点作另一任意直线，交 BH 于点 P，交 BG 于点 Q。

（7）连结 MP 并不断延长；连结 GQ 并不断延长，GQ 交 MP 于点 R。

（8）连结 RB 并不断延长，则 RB 必过 A 点。

注意：实际操作中，作图未必一次就能成功，例如，HG、HP、BR 等的长度仍大于直尺的长度，这时就需要调整原先作的直线的角度，直到直尺够得着为止。理论上只要试验的次数足够多，必定可以完成作图。

2）作出长距离两点的中点

已知 A、B 两点，AB 的长度大于直尺长度，并且大于圆规最大张开值。求作 A、B 两点的中点。

（1）连结 A、B 两点，如图 9-2-2 所示。（作图参照图 9-2-1，连结长距离两点作图）

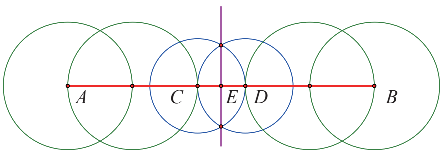


图 9-2-2

（2）分别从 A、B 点向中心作出同样个数的相等圆，直到 C、D 点的距离小

于圆规最大张开值。

（3）作出 CD 的中点 E，那么 E 点同时也是 AB 的中点。

第三节 直尺定规作图

直尺定规作图定义

用无刻度但允许无限长的直尺，与开口固定，只能作出固定大小圆的圆规解决平面几何作图问题就叫直尺定规作图。

直尺定规作图与尺规作图等价

1673 年丹麦数学家摩尔（G.Mohr）发表了未署名的小册子《欧氏几何趣味补录》（Compendium Euclidis Curiosi）证明了直尺定规作图与尺规作图等价。

其实，“直尺作图”只需要预先给定一个定圆及其圆心就可以了，作图过程中不再使用圆规。而“直尺定规”在作图过程中，时不时还会有圆规帮忙，所以直尺定规作图比直尺作图简单得多，这里就不介绍了，有兴趣的读者可自行研究。

第四节 短尺定规作图

短尺定规作图定义

用无刻度且长度有限的直尺，并且作图过程出现无法直接用直尺连结的两个点，与开口固定，只能作出固定大小的圆的圆规的作图就叫做短尺定规作图。

短尺定规作图与尺规作图等价

在“短尺小规作图”一节里我们知道，直尺无论多长，总可以连结任意距离的指定两点，所以短直尺和无限长的直尺等价，直尺定规作图与尺规作图等价，于是短尺定规作图与尺规作图等价。

本节没什么新内容可讲，有兴趣的读者可以自己研究琢磨。

第五节 小规作图

小规作图定义

只用一把开口可以任意张合，但作出的圆的半径大小有一个上限的圆规，并且作图过程会出现无法作出指定半径大小的圆的作图就叫做小规作图。

小规作图与尺规作图等价

在第八章“锈规作图”里我们知道，无论给定的两点距离多大，锈规都可以作出两点间的中点，那么小圆规自然也可以作出任意两点间的中点。也就是说小圆规可以将图形任意缩放，从而完成无限大小的圆规可以完成的所有作图，小规作图和无限圆规作图等价。又因为单规作图与尺规作图等价，于是小规作图与尺规作图等价。

不过小圆规比锈规灵活得多，很多作图不必像锈规那样费尽周折。具体作图可以参考锈规作图，并利用小圆规两脚可以自由张合这一优势进行简化，在此不再介绍，有兴趣的读者可自行研究。

第六节

短尺作图

短尺作图定义

在平面上预先给定一个半径长等于 1 的圆，并且知其圆心。作图时只用一把无刻度且长度有限的直尺，并且作图过程出现了无法直接用直尺连结的两个点，这种作图就叫做短尺作图。

短尺作图与尺规作图等价

因为短直尺和无限长的直尺等价，又因为直尺作图与尺规作图等价，于是短尺作图与尺规作图等价。

短尺作图和短尺小规作图问题的解题原理很多都一样，在此不再介绍，有兴趣的读者可自行研究。

第七节

尺规作图结束语

尺规作图到本章基本介绍完毕。

只需要预先给定一个残圆及其圆心，而不需要一个整圆；只需要有限长度的无刻度直尺，而不需要无限长度的无刻度直尺，直尺作图就和尺规作图等价，这是对直尺的使用限制到了极致！圆规两脚的开口固定，只能作出固定大小的圆，则是对圆规使用的极致限制！在这些极致的限制下很多问题变得困难重重，但数学家们依旧解决了这些看似不可能完成的任务，数学的威力让人惊叹。

作图工具只用没有刻度的直尺和圆规，是古希腊人力求精简的数学精神而对作图工具的最大限制。随着研究的深入，后人对作图工具的限制更加登峰造极，笨拙的工具在高超的数学技巧下化腐朽为神奇，这是古希腊人所始料未及的。

第十章　近似作图

前面研究正多边形尺规作图时已经指出：边数等于 7、9、11、13、14、19 等的正多边形都是尺规作图不能完成的作图，所以所有这些正多边形的尺规作图全都是近似作图。

精确作图是尺规作图的精髓，尺规作图不研究也没有有效理论可以研究近似作图。但我们又时常会碰到要画这些尺规作图不能完成的图形，于是一些近似作法便应运而生了。这些作图法没有什么理论支撑，主要靠拼凑。

随意作几条首尾相连的线段，就可以认为它是正多边形的近似图形，不过这样的近似度非常差，让人很难接受。但近似度也不是越高越好，人眼能分辨最短的长度大约是 0.1 毫米，近似图形超过这个精度也没多大意义了。

一般而言，近似作图的作图方法是无限的，作图步骤越多越复杂，可能得到的图形也越精确。不过，作图不可以太复杂，一个优质的近似作图，应该在作图步骤的繁简与图形的近似度之间取得平衡。这个平衡没有评判标准，主要看作图者在步骤的繁简程度与图形的近似程度之间的取舍。

下面是一些正多边形的近似图形参考作法，精度基本可以令人满意。

1．正五边形

正五边形本来有精确的尺规作图法，但因为很多教科书甚至是某些数学手册都将如图 10-1-1 所示的作图视为精确作图，这其实是错的，该五边形无法内接于一个圆，不是精确的正五边形，而是一个近似作图，大家参考一下。

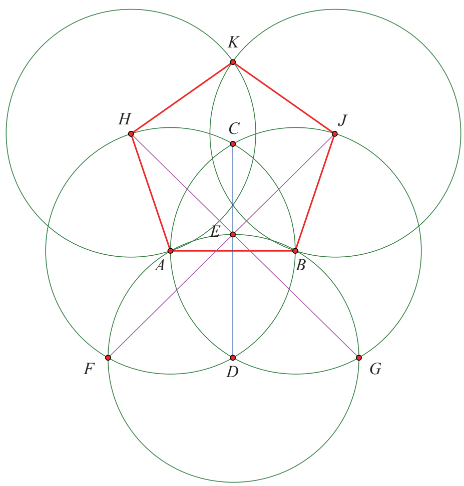


图 10-1-1

尺规作图作出正五边形（近似作法）。

作法：

（1）任取两点 A、B，分别以 A、B 为圆心，AB 长为半径作圆，交点为 C、D 两点，如图 10-1-1 所示。

（2）以 D 点为圆心，DA 长为半径作圆，交⊙A 于点 F，交⊙B 于点 G。

（3）连结 CD，交⊙D 于点 E。

（4）作直线 EG，交⊙A 于点 H；作直线 EF，交⊙B 于点 J。

（5）分别以 H、J 为圆心，AB 长为半径作圆，交点为 K。顺次连结 K、H、A、B、J，作出正五边形的近似图形。

2．正七边形

尺规作图作出正七边形（近似作法）。

作法：

（1）任作一⊙O，如图 10-1-2 所示。

（2）在⊙O 上任取一点 A，以 A 点为圆心，AO 为半径作圆，交⊙O 于 B、C 两点。

（3）连结 BC、AO，交点为 D。

（4）以 C 点为圆心，CD 为半径作圆，交⊙O 于 E 点，则 CE 为⊙O 内接正七边形边长。

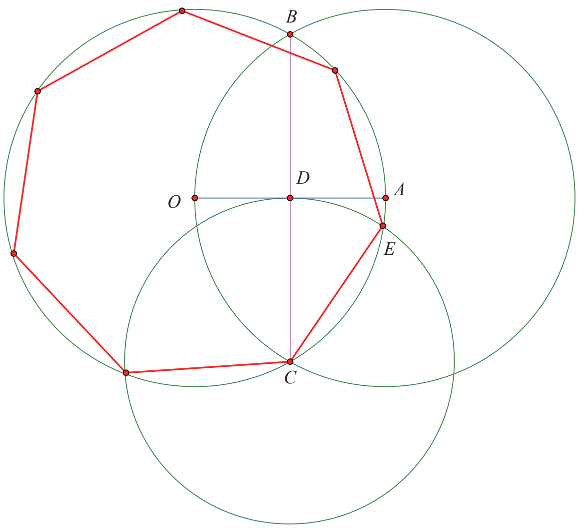


图 10-1-2

3．正九边形

尺规作图求作正九边形（近似作法）。

作法：

（1）任作一⊙O，如图 10-1-3 所示。

（2）作出两条垂直半径 $AO \perp BO$。

（3）作出 BO 的中点 C。

（4）截取 $BD=BC$。

（5）作出 $\angle BOA$ 的角平分线，交⊙O 于点 E。

（6）以 A 点为圆心，AE 长为半径作圆，交⊙O 于点 F。

（7）连结 EF。

（8）过 C 点作 BO 的垂线，交 EF 于点 G。

（9）作直线 OG。

（10）过 D 点作 BO 的垂线，交 OG 于点 H。

（11）连结 AH，交 CG 于点 J。

（12）连结 OJ，交⊙O 于点 K。

（13）以 A 点为圆心，AK 长为半径作圆，交⊙O 于点 L，则 KL 为⊙O 内接正九边形的边长。

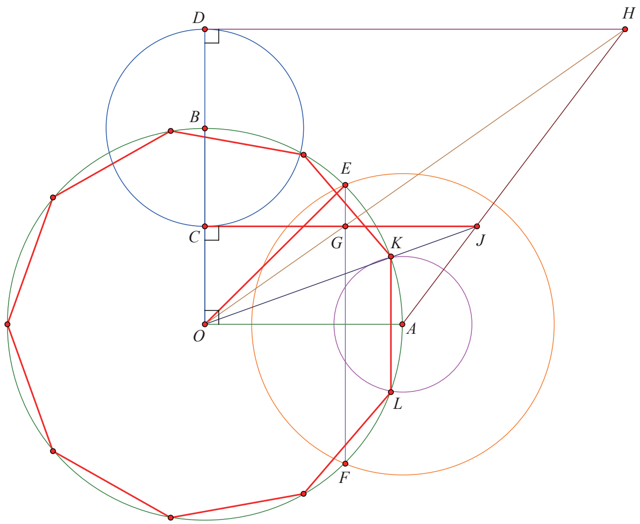


图 10-1-3

4．正十一边形

尺规作图作正十一边形（近似作法）。

作法：

（1）任作一⊙O，如图 10-1-4 所示。

（2）作出两条垂直半径 $AO \perp BO$。

（3）作出 BO 的中点 C。

（4）过 C 点作出 BO 的垂线，交⊙O 于点 D。

（5）作出 CD 的中点 E。

（6）作射线 OE，交⊙O 于点 F。则∠FOA 等于 4 倍⊙O 内接正十一边形圆心角。

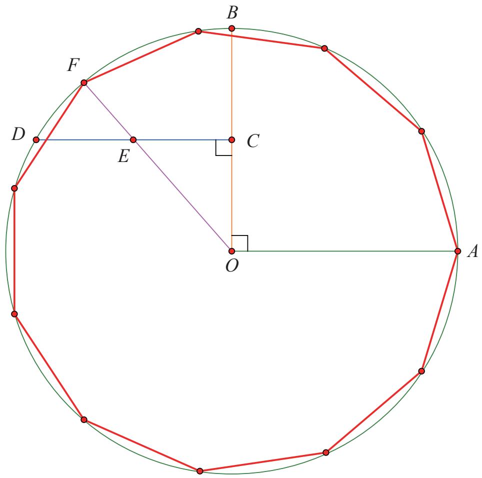


图 10-1-4

5．正十三边形

尺规作图作出正十三边形（近似作法）。

作法：

（1）任作一圆⊙O，如图 10-1-5 所示。

（2）作出两条垂直直径 $BC \perp AO$。

（3）以 B 点为圆心，BO 为半径作弧，交⊙O 于 D、E 两点。

（4）以 C 点为圆心，CO 为半径作弧，交⊙O 于 F 点。

（5）作直线 FD；连结 DE，交 BC 于点 G。

（6）以 G 点为圆心，GO 为半径作圆，交 GE 于点 H。

（7）作直线 OH，交⊙O 于点 J。

（8）过 J 点作 DF 的垂线，垂足为点 K。

（9）连结 AK，交⊙O 于点 L。

（10）连结 LO，则∠LOA 等于 5 倍的⊙O 内接正十三边形圆心角。

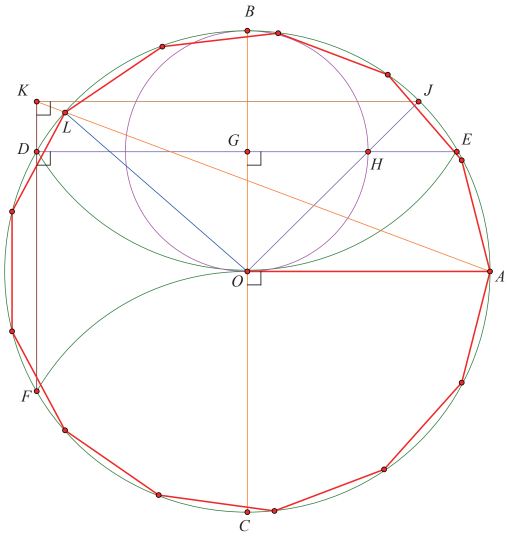


图 10-1-5

6．正十九边形

尺规作图作出正十九边形（近似作法）。

作法：

（1）任作一圆⊙O，如图10-1-6所示。

（2）作出两条垂直直径$CO \perp AB$。

（3）以A点为圆心，AO为半径作圆，交⊙O于D、E两点。

（4）连结DE。

（5）作F点，使得$4OF=CO$。

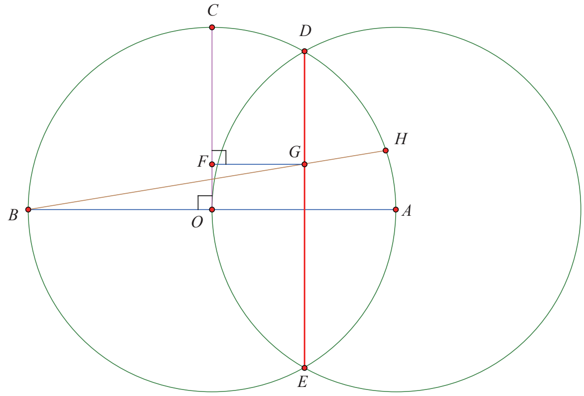


图 10-1-6

（6）过F点作DE的垂线，交DE于G点。

（7）作射线BG，交⊙O于H点，则AH为⊙O内接正十九边形边长。

7．正多边形万能作图

情况一：万能正多边形尺规作图（近似作图）

正多边形万能作图其实不是万能的，它不但是一种近似作图，而且所作图形的近似度也比有专门针对性的近似作图近似度差很多，在精度要求不高的情况下，可以将就一下。

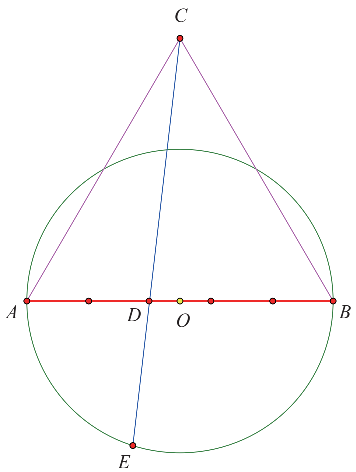


图 10-1-7

解法一：

作法：

（1）AB为⊙O的直径，如图10-1-7所示。

（2）$\triangle ABC$为正三角形。

（3）n等分AB。

（4）取D点，使得$AD=2AB/n$。

（5）作射线CD，与⊙O交点为E，则AE为正n边形边长。

此法对于$n<8$时作的正n边形精度不错。

解法二：

作法：

（1）AB、CD为⊙O的两条互相垂直直径，如图10-1-8所示。

（2）$\triangle ABE$为正三角形。

（3）n等分AB。

（4）取 F 点，使得 $OF=2AB/n$。

（5）作射线 EF，与⊙O 交点为 G，则 GD 为正 n 边形边长。

此法对于 $n>8$ 时精度优于解法一。

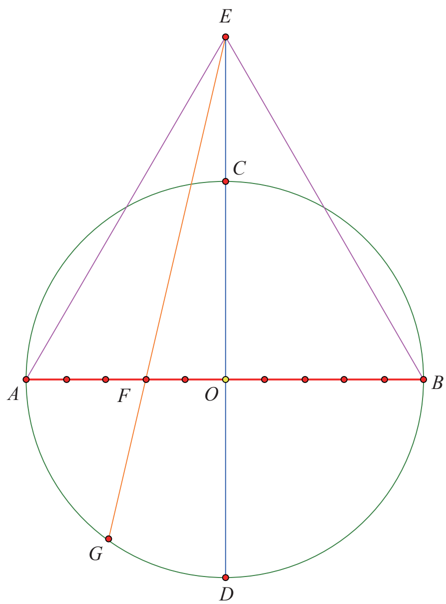


图 10-1-8

情况三：任意等分任意角万能作图

此作图不仅是 n 等分角的高精度作图，也是正多边形的高精度作图。名之高精度作图，只是相对于前面两种万能作图精度更高，但比有专门针对性的近似作图，精度还是差了些。

已知 $\angle ABC$，求作其 n 分之一角。

作法：（高精度近似作法）

（1）以 B 点为圆心，AB 为半径作弧，交 BC 于点 C，如图 10-1-9 所示。

（2）作 $\angle ABC$ 的角平分线 BD。

（3）连结 AC，交 BD 与点 E。

（4）F 点为 ED 的三等分点。

（5）以 B 点为圆心，BF 为半径作弧。

（6）G、H 点分别 AB、BC 的 n 等分点

（7）分别过 G、H 点作 BD 的平行线，交以 BF 为半径的⊙B 于 J、K 两点。

（8）连结 JB、KB，则 $\angle JBK=\dfrac{1}{n}\angle ABC$。

此法精度颇高，可应用于正多边形作图。

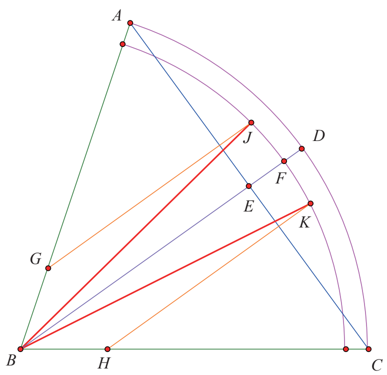


图 10-1-9

第十一章　双边尺和刻度尺

人们由于受到“三大作图难题”的长期困扰，又找不到有效理论证明像“三大作图难题”一样的问题是尺规作图不能问题，于是各种扩大尺规作图规则限制的“投机取巧作图”便应运而生，比较有代表性的是“双边尺作图”和“刻度尺作图”。在这种情况下，“三大作图难题”被轻松解决，现在社会上很多人宣称解决了“三大作图难题”，所用的作图工具也类似这样没有严格遵守尺规作图的规则限制。因为扩大了尺规作图工具的使用功能限制，它们不再属于尺规作图范畴。

第一节

双边尺作图

双边尺定义

双边尺，顾名思义，就是作图过程中，可以使用尺子两边作出直线的尺。有两种情况：

（1）两边互相平行、两边宽度等于 1 并且长度无限的直尺，叫“平行双边尺”，如图 11-1-1 所示；

（2）双边不互相平行的尺。

对于第二种情况“双边不互相平行的尺”，其中双边成直角，尺的宽度等于 1 的双边尺也叫“直角尺”或“矩尺”，如图 11-1-2 所示。我国古代的作图“规矩”中的“矩”就是双边尺中的“矩尺”。

图 11-1-1　平行双边尺

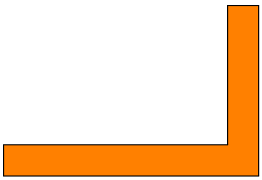


图 11-1-2　矩尺、直角尺

用“平行双边尺”的两边平行关系，可以作出两条不确定长度并且距离等于 1 的平行线段。“平行双边尺”不是有四条边的“矩形尺”，它的另外两边是不能利用的，所以它不能直接作出一个矩形来，这一点需要注意。

用“矩尺”则可以直接作出两条任意长度并且互相垂直的线段。

双边尺作图定义

用双边尺来解决平面几何作图问题就叫双边尺作图。

由于拥有可利用的两条边，所以使用多把双边尺组合，可以使尺子的作图功能更强大，例如，利用双矩尺可以轻松解决“三大作图难题”中的“倍立方问题”。为了简化，本书只讨论单把双边尺作图，这是需要注意的。

单把双边尺作图和尺规作图等价

一把双边尺不论双边平行或不平行都和尺规作图等价，都可以完成尺规作图可以完成的作图，这个结论是艾德勒和其他数学家证明的。尺子当然不能作圆，但和尺规作图作出所有所求的点的能力一样。

双边尺扩大了作图工具的功能，不属于尺规作图范畴，在此仅举“平行双边尺”的几个作图例子，有兴趣的读者可以自行研究。

第二节 平行双边尺作图举例

1．作中点

已知线段 AB，求作其中点。

作法：

（1）双边尺一边与 AB 重合，作出另一边平行线 DE，如图 11-2-1 所示。

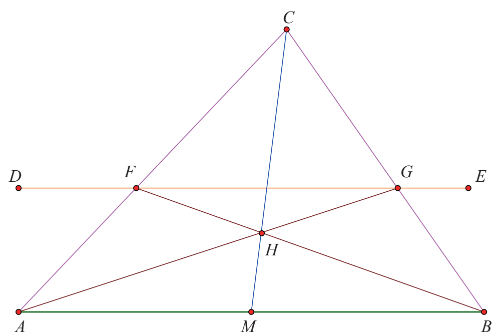


图 11-2-1

（2）任取一点 C，连结 AC，交 DE 于点 F；连结 BC，交 DE 于点 G。

（3）连结 BF、AG，交点为 H。

（4）作直线 CH，交 AB 于点 M，则 M 点为 AB 中点。

2．作平行线

已知直线 AB 和 C 点，求过 C 点作 AB 的平行线。

作法：

（1）双边尺一边过 C 点，作出两边直线 i、j，i 交 AB 于 D 点，如图 11-2-2 所示。

（2）双边尺一边与 j 重合，作出另一边 k 与 AB 的交点为 E。

（3）连结 CE，交 j 于 F 点。

（4）作直线 DF，交 k 于 G 点。

（5）作直线 CG，则 $CG // AB$。

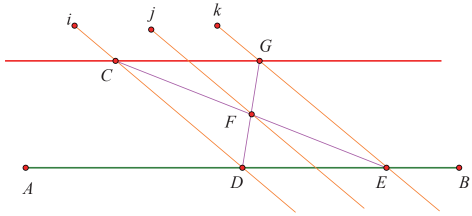


图 11-2-2

3．作垂线

情况一：过直线上一点作直线的垂线

已知直线 AB 和直线上 C 点，求过 C 点作 AB 的垂线。

作法：

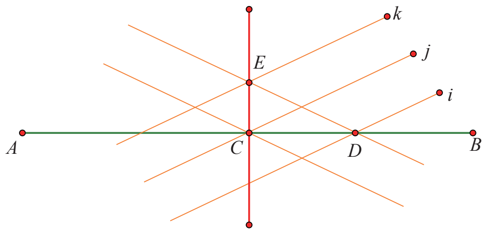


图 11-2-3

（1）双边尺一边过 C 点，作出两边直线 i、j，i 与 AB 的交点为 D，如图 11-2-3 所示。

（2）双边尺一边与 j 重合，作出另一边 k。

（3）双边尺两边分别过 C、D 点，作出两边直线，与 k 的交点为 E。

（4）作直线 CE，则 $CD \perp AB$。

情况二：过直线外一点作直线的垂线

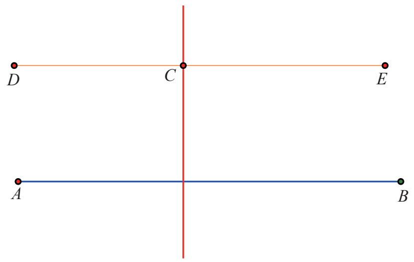


图 11-2-4

已知直线 AB 和 AB 外一点 C，求过 C 点作 AB 的垂线。

作法：

（1）过 C 点作 AB 的平行线 DE，如图 11-2-4 所示。

（2）过 C 点作 DE 的垂线，则该垂线为过 C 点的 AB 的垂线。

4．作角平分线

已知 $\angle ABC$，求作 $\angle ABC$ 的角平分线。

作法：

（1）双边尺双边与 $\angle ABC$ 的两边重合，作出另一边，交点为 D，如图 11-2-5 所示。

（2）作直线 BD，则 BD 为所作 $\angle ABC$ 的角平分线。

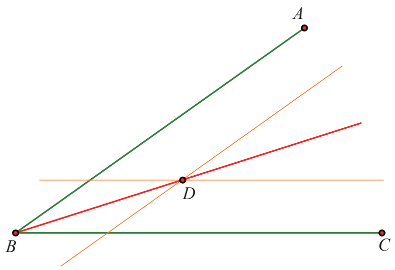


图 11-2-5

5．截取线段等于已知线段

情况一：共线截取

已知 A、B、C 三点共线，在直线 AB 上截取与 AB 相等的线段，其一个端点为 C。

作法：

（1）任作 AB 的平行线 DE，如图 11-2-6 所示。

（2）双边尺两边过 A、B 点，作出两边，与 DE 交点为 F、G。

（3）连结 FC。

（4）过 G 点作 FC 的平行线，交 AB 于 H 点，则 $CH=AB$。

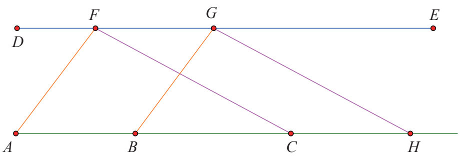


图 11-2-6

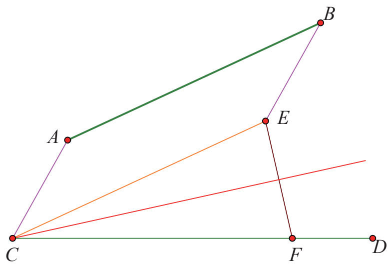


图 11-2-7

情况二：不共线截取

已知线段 AB 和直线 CD，求过 C 点在 CD 上截取与 AB 相等的线段。

作法：

（1）作平行四边形 $ACEB$，如图 11-2-7 所示。

（2）作∠ECD 的角平分线。

（3）过 E 点作角平分线的垂线，交 CD 于 F 点，则 $CF=AB$。

6．乘法、除法

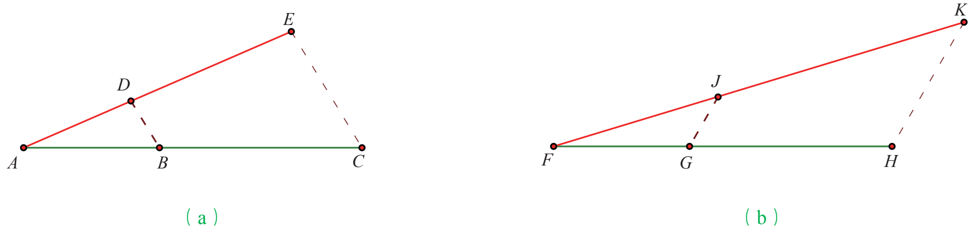


图 11-2-8

令 $AD=1$，$BD//EC$，则 $DE=\dfrac{BC}{AB}$，如图 11-2-8（a）所示。

令 $FG=1$，$JG//KH$，则 $JK=JF\cdot GH$，如图 11-2-8（b）所示。

7．开平方

已知线段 AB，双边尺宽度为 1，求作 $\sqrt{AB}$ 。

作法：

（1）在直线 AB 上截取 $BC=1$，如图 11-2-9 所示。

（2）作出 AC 的中点 D。

（3）过 D 点作 AB 的垂线，截取 $DE=DB$，$DF=1$。

（4）连结 AE，过 F 点作 AE 的平行线，交 AB 于 G 点。

（5）双边尺两边分别过 G、D 点，作出两边直线 i、j。

（6）过 D 点作 j 的垂线，交 BH 直线于 H 点，则 $BH=\sqrt{AB}$。

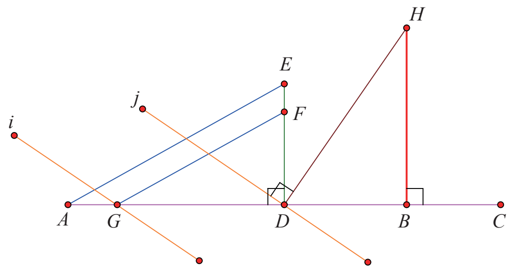


图 11-2-9

8．作正三角形

作法：

（1）作 $AB\perp CD$，截取 $AC=BC=1$，如图 11-2-10 所示。

（2）双边尺两边分别过 A、B 点，作出两边 i、j。

（3）过 A 点作 i 的垂线，交 j 于 E 点。

（4）作直线 AE，交 CD 于 D 点。连结 BD，则 $\triangle ABD$ 为正三角形。

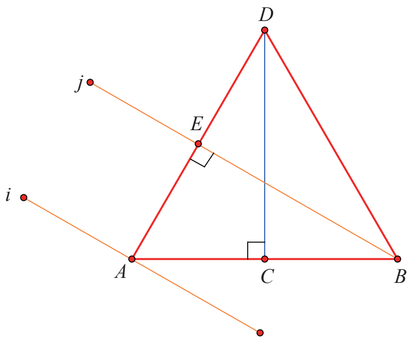


图 11-2-10

9．作正方形

作法：

（1）作出两条垂线，如图 11-2-11 所示。

（2）截取 $AM=MB=CM=MD$。

（3）连结 C、A、D、B，作出正方形。

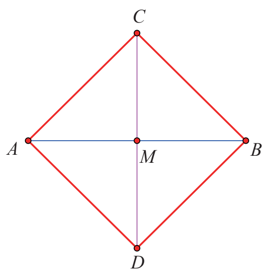


图 11-2-11

10．作正五边形

作法：

（1）作垂线 $AC\perp AB$，截取 $AC=AB$，如图 11-2-12 所示。

（2）作 AB 的中点 D。

（3）作直线 CDE。

（4）作 $\angle ADE$ 的角平分线，交 AC 于 F 点。

（5）作 $\angle ADC$ 的角平分线 GD。

（6）过 C 点作 GD 的垂线，交 GD 于 G 点。

（7）过 F 点作 AC 的垂线，并截取 $JF=FK=CG$。

（8）作 $FH=FC$。

（9）作直线 HJ、HK，并截取 $JM=KN=JK$。顺次连结 C、M、J、K、N，作出正五边形。

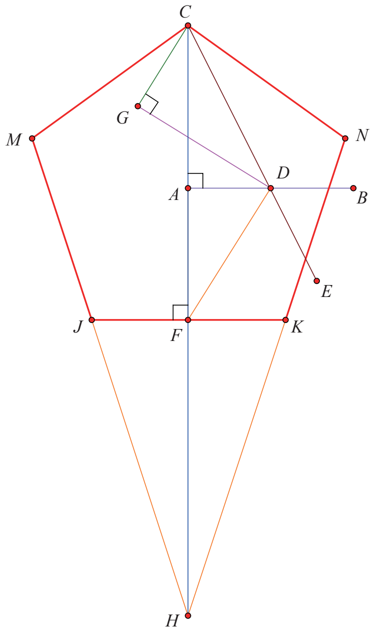


图 11-2-12

第三节
刻度尺作图

刻度尺作图定义

只用一把有且仅有两个固定刻度的直尺解决平面几何作图问题，就叫做刻度尺作图。

为了作出指定长度的线段，规定两个刻度的距离等于 1，所以刻度尺作图也可以叫“单位刻度尺作图”。

刻度尺作图与尺规作图不等价

刻度尺可以截取等距离的线段，此功能相当于一把两脚固定的圆规。而直尺本身可以作直线，所以刻度尺同时集圆规和直尺的功能于一身。刻度尺比尺规更强大，尺规作图可以完成的作图，刻度尺都可以完成，并且刻度尺还可以完成一些尺规作图不能完成的作图，如三等分任意角、倍立方等。很多人宣称解决了三等分角问题，其中很大一部分人就是用刻度尺解决的。

如果直尺可以在上面任意作标记的，功能比刻度尺更强大。可以在直尺上面随时任意作标记，相当于一把可以自由张合的圆规，用这样一把集直尺和圆规功能于一身的工具，作图比刻度尺作图更加得心应手。

刻度尺作图不属于尺规作图范畴，这里不过多介绍，仅举几个例子，有兴趣

的读者可自行研究。

第四节
刻度尺作图举例

作图举例

1．三等分任意角

刻度尺三等分任意角∠BAC。

解法一：

作法：

（1）在 AB 上作出点 D，使得 AD=1/2，即刻度尺两个刻度长的一半，如图 11-4-1 所示。

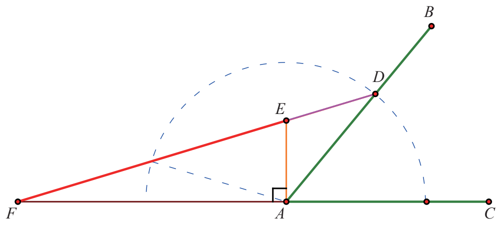


图 11-4-1

（2）过 A 点作 AC 的垂线 AE。

（3）作直线 FD，要求直尺的其中一个刻度 F 在 AC 线上；另一个刻度 E 在 AE 线上，即 EF=1，并且还要求 EF 线过 D 点，则∠EFA 等于∠BAC 的 1/3。

解法二：

作法：

（1）在 AB 上作出点 D，使得 AD=1/2，即刻度尺两个刻度长的一半，如图 11-4-2 所示。

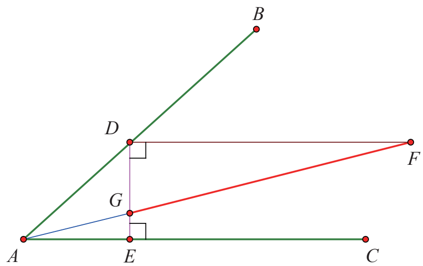


图 11-4-2

（2）过 D 点作 DF//AC。

（3）过 D 点作 AC 的垂线 DE，垂足为 E。

（4）过 A 点作线段 AF，与 DE 的交点为 G，与 DF 的交点为 F，并且要求 GF=1，则∠FAC 等于∠BAC 的 1/3。

2．开三次方与倍立方

已知线段 x 以及单位长度，求作线段 x 的三次方根。

作法：

（1）作线段 AC，使得 AB=BC=1，如图 11-4-3 所示。

（2）作出点 D，使得 AD=1，BD=$\frac{x}{4}$。

（3）作直线 BD、CD。

（4）过 A 点作直线 AE，与 BD 交点为 E，与 CD 交点为 F，要求 EF=1，那么 ED 等于 x 的三次方根。

根据这个作图原理，三大难题之一的立方倍积也就相应可解了。

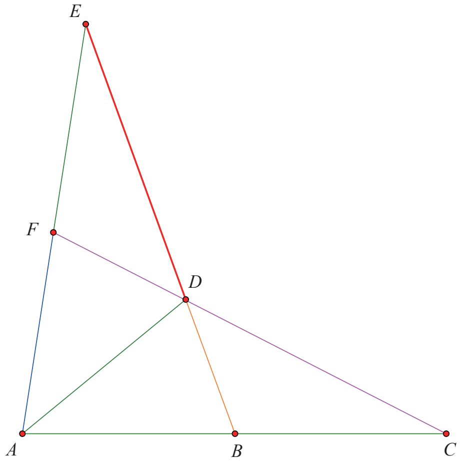


图 11-4-3

3．作平行线

已知直线 AB，直线外一点 C，求过 C 点作 AB 的平行线。

作法：

（1）在 AB 上任取一点 D，截取 ED=DF=刻度值，如图 11-4-4 所示。

（2）作直线 EC，在 EC 上任取一点 G。

（3）连结 GF。

（4）连结 CF、GD，交点为 K。

（5）作直线 EK，交 GF 于 H 点。

（6）作直线 CH，则 CH//AB。

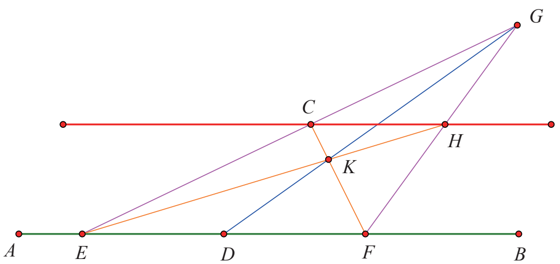


图 11-4-4

4．作垂线

已知直线 AB，C 为 AB 上一点，求过 C 点作 AB 的垂线。

作法：

（1）作 AB 的平行线，与 AB 距离小于刻度值，如图 11-4-5 所示。

（2）截取 CF=CG=FJ=KG。

（3）作直线 FJ、GK，交点为 H。

（4）作直线 CH，则 $CH \perp AB$。

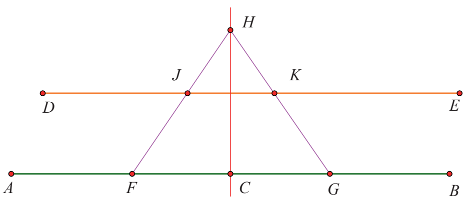


图 11-4-5

5．作等边三角形

用一把刻度尺作出等边三角形。

作法：

（1）作任意直线并截取 AB，如

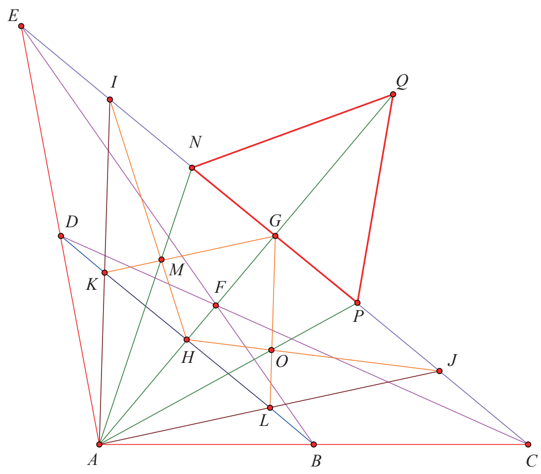


图 11-4-6

图 11-4-6 所示。

（2）在 *AB* 直线上截取 *BC*。

（3）过 *A* 点作任意直线并截取 *AD*。

（4）在 *AD* 上截取 *DE*。

（5）连结 *CD*。

（6）连结 *BE*，交 *CD* 于 *F* 点。

（7）作直线 *AF*。

（8）作直线 *EC*，交 *AF* 于 *G* 点。

（9）作直线 *BD*，交 *AF* 于 *H* 点。

（10）在 *EC* 上截取 *GI*、*GJ*。

（11）连结 *AI*，交 *BD* 于 *K* 点。

（12）连结 *AJ*，交 *BD* 于 *L* 点。

（13）连结 *GK*。

（14）连结 *HI*，交 *GK* 于 *M* 点。

（15）作直线 *AM*，交 *EC* 于 *N* 点。

（16）连结 *HJ*。

（17）连结 *GL*，交 *HJ* 于 *O* 点。

（18）作直线 *AO*，交 *EC* 于 *P* 点。

（19）截取 *NQ*，其中 *Q* 点在 *A*F 上。

（20）连结 *PQ*、*NQ*，则△*NQP* 为所作等边三角形。

6. 作正方形

用一把刻度尺作出正方形。

作法：

（1）作任意直线并截取 *AB*，如图 11-4-7 所示。

（2）在 *AB* 上截取 *BC*。

（3）过 *A* 点作任意直线并截取 *AD*。

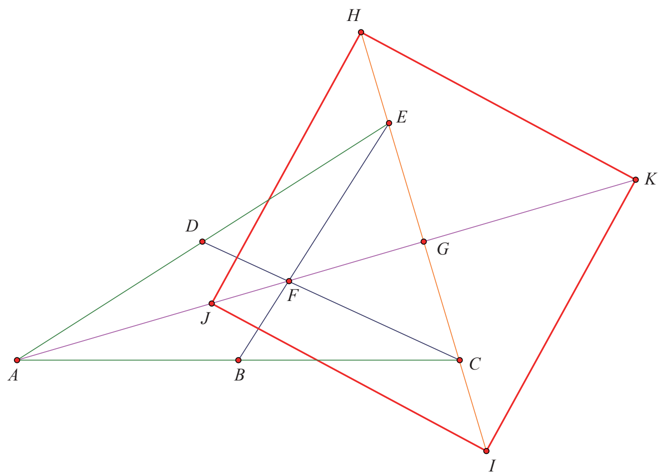


图 11-4-7

（4）在 AD 上截取 DE。

（5）连结 CD。

（6）连结 BE，交 CD 于 F 点。

（7）作直线 AF。

（8）作直线 EC，交 AF 于 G 点。

（9）在 GE 上截取 GH。

（10）在 GC 上截取 GI。

（11）在 AF 上截取 JG。

（12）在 AF 上截取 GK。

（13）顺次连结 J、H、K、I 得正方形。

7. 作正五边形

用刻度尺作出正五边形。

作法：

（1）作任意两条相交直线 AB、AC，并截取 $AB=BD=AC=EC=1$，如图 11-4-8 所示。

（2）连结 BE、CD，交点为 F。

（3）作直线 AF、EC，交点为 G。

（4）截取 $GH=GL=GJ=JK=1$。

（5）连结 LK，交 AC 于 M 点。

（6）连结 MG、JL，交点为 N。

（7）作直线 KN，交 AL 于 O 点。

（8）作直线 OM、LH，交点为 P。

（9）连结 GP、OH，交点为 Q。

（10）作直线 LQ，交 ED 于 R 点。

（11）截取 $RS=ST=RU=UV=1$。

（12）连结 UT、SV，交点为 W。

（13）作直线 RW，交 AG 于 X 点。

（14）在 RX 上任取一点 Y，连结 VY。

（15）连结 UY、VX，交点为 Z。

（16）作直线 RZ，交 UY 于 A_1 点。

（17）作直线 A_1X。

（18）截取 $B_1G=C_1G=1$，要求 B_1、C_1 点在 A_1X 上。

（19）连结 LB_1，与直线 C_1G 交于 D_1 点。

（20）连结 LC_1，与直线 B_1G 交于 E_1 点。

（21）作直线 D_1E_1。

（22）截取 $F_1G=G_1G=1$，要求 F_1、G_1 点在 D_1E_1 上。

（23）顺次连结 L、F_1、B_1、C_1、G_1 作出正五边形。

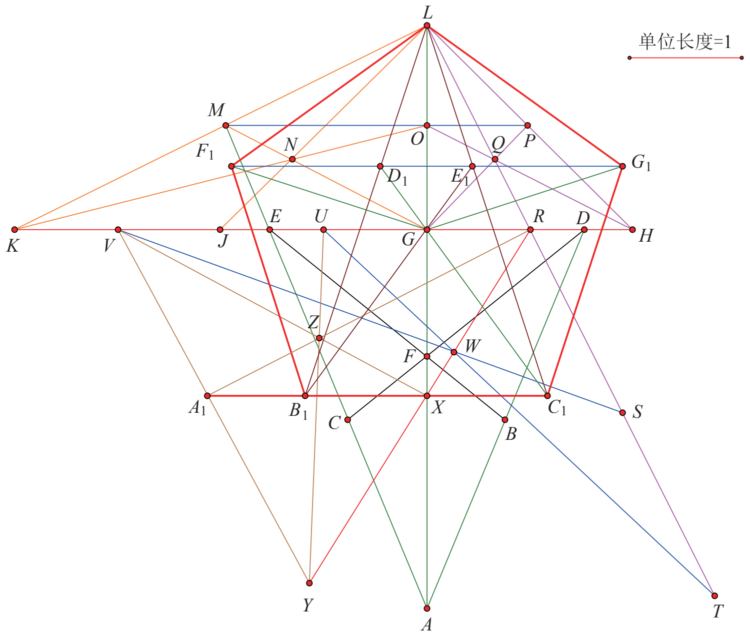


图 11-4-8

第五节 结束语

第十一章介绍了扩大尺规作图的作图工具限制的两个变种作图，实际上作图工具还可以继续发展，例如，三角尺作图、矩形尺作图、半圆尺作图、多边形尺作图等等。三角尺作图又分为等边三角形三角尺作图、等腰直角三角尺作图、一个角等于 30° 的直角三角尺作图、一般三角形三角尺作图等。矩形尺不同于矩尺，矩形尺的外观是长方形，矩形尺可以分为长方形尺作图和正方形尺作图。

只要发挥想象力和创造力，作图工具的花样无穷无尽。和双边尺作图一样，这些作图工具都扩大了尺规的功能，它们比尺规更强大，可以解决一些尺规作图不能解决的问题。

限于篇幅，本书不再介绍各种变种作图工具的作图，有兴趣的读者可自行研究。

第十二章 番外篇

本章主要介绍“火柴棒几何学”、“折纸几何学”和“包络线”。

“火柴棒几何学”的作图工具是若干根相同的火柴棒，用火柴棒搭建出符合要求的几何图形。“折纸几何学”的作图工具是若干张纸，用纸折出符合要求的几何形状。和尺规只能在平面作图不同，折纸可以构建立体几何图形。在“包络线”里，可以用尺规能作出的直线或圆包络出尺规作图不能作出的曲线的近似图形。

这些和尺规作图很像又不太像的“作图”也是一片宽广的天地。

第一节 火柴棒几何学

火柴，如图 12-1-1 所示，作为人们主要的日常点火工具，兴盛了很长时间，直到上世纪中期便携式打火机大规模使用，火柴才逐渐淡出人们的生活。现在火柴在日常生活中主要用来点雪茄烟，这种火柴制作精良，长度比普通的火柴长一些，如图 12-1-2 所示。

图 12-1-1　火柴

图 12-1-2　雪茄烟专用火柴

围绕火柴棒出现了很多数学游戏，如数学算式游戏（如图 12-1-3 所示的）等式不成立，要求移动一根火柴，使数学式成立。有人给出的答案为 5×2-2≠6+2+2，这种不等式太容易了，差强人意，比较满意的答案是图 12-1-4 所示的算式。

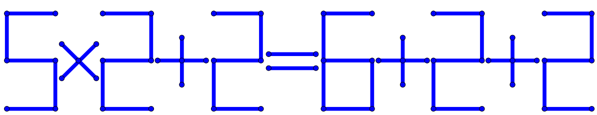


图 12-1-3

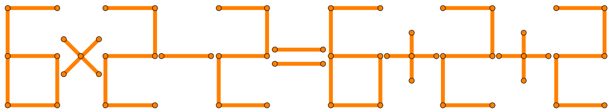


图 12-1-4

又如图形变换游戏（如图 12-1-5 所示要求移动三根火柴，使图形变为只有四个正方形，答案如图 12-1-6 所示）。

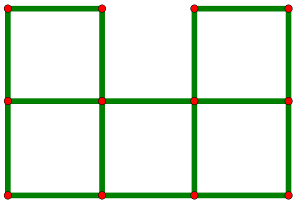


图 12-1-5

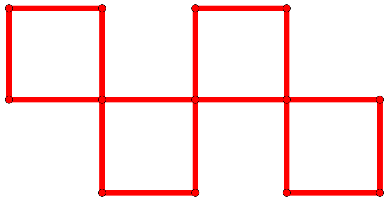


图 12-1-6

这类趣味火柴游戏经常出现在智力游戏里，时不时在小学生数学试题里也能见到它的踪影。本书不讨论这类问题，主要研究如何合理利用几何学原理，用火柴棒来作一些复杂的平面几何图形。

火柴棒几何学主要研究如何用若干根相同的火柴棒搭建出符合要求的几何图形。

1939 年，T.R.Dawson 在一篇论文中证明了一个结论：尺规作图可以作出的点，用火柴棒也可以作出，火柴棒也只能作出尺规作图能作出的点，火柴棒作图与尺规作图等价。

这里需要约定一下：如果不小心触碰火柴棒，火柴棒与火柴棒之间的连结点就会断开，于是我们不可以对已经搭建好的复杂图形进行整体旋转而不产生变形，也不可以直接将火柴首位连成一串火柴链，拉直后成一条直线。例如，如图 12-1-7 所示，要求用若干根火柴棒连结距离比较远的两点 A、B。

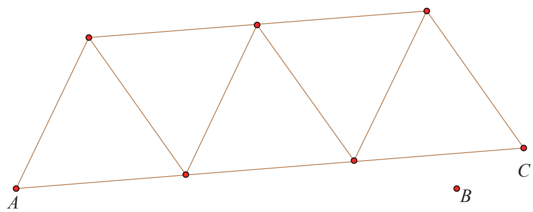


图 12-1-7

我们搭建出若干个正三角形得到线段 AC，此时不可以旋转 AC 使其通过 B 点，因为旋转过程中，“火柴阵”会散架。

假如将火柴棒连结后，连结点可以自由活动却又不断开，那么火柴棒还可以解决尺规作图不能解决的一些问题（如作正七边形），此时火柴棒作图与尺规作图不等价，火柴棒比尺规作图更强大。

下面介绍一部分简单的火柴棒作图。

1．延长线段

情况一：线段 AB 等于火柴棒长度

已知线段 AB，求延长线段。

作法原理：这种情况非常好办，如图 12-1-8 所示，不断搭建正三角形，可以延长 AB 任意多倍。

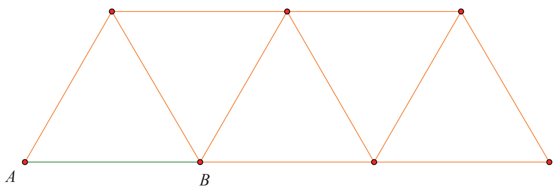


图 12-1-8

情况二：线段 AB 不等于火柴棒长度

已知线段 AB，求延长线段。

作图原理：如图 12-1-8 所示不断作等边三角形，由于等边三角形的边长不等于火柴棒长度，在后面介绍等边三角形作图时会介绍。

2．作短距离两点间中点

情况一：A、B 两点距离$<\sqrt{3}$

已知线段 AB，$AB<\sqrt{3}$，求作其中点。

作法：

如图 12-1-9 所示，最后 M 点为所作中点。

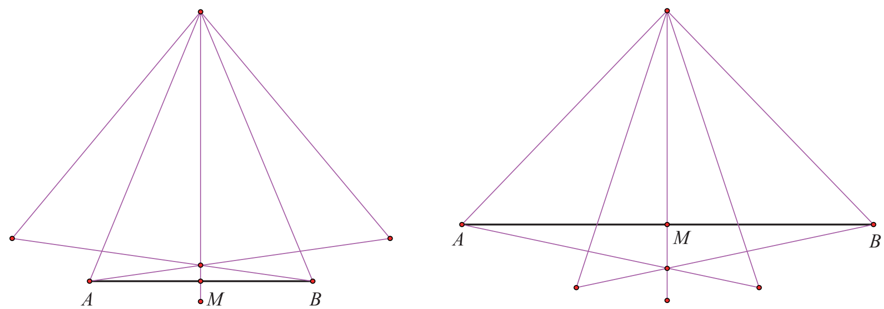


图 12-1-9

情况二：A、B 两点距离等于火柴棒长度

已知线段 AB 恰等于火柴棒长度，求作其中点。

作法：

（1）在 AB 边任取一点 C，用火柴棒搭出 D 点，如图 12-1-10 所示（$AD=CD=$火柴棒长度）。

（2）用火柴棒搭出 E、F 点（$EC=ED=DF=AF=$火柴棒长度），得到交点 G、H、J。

（3）过 GH、DJ 的两根火柴棒交点为 K。

（4）火柴棒过 BH，交 AD 于 L 点。

（5）火柴棒过 LK，交 AB 于 M 点，则 M 点为 AB 中点。

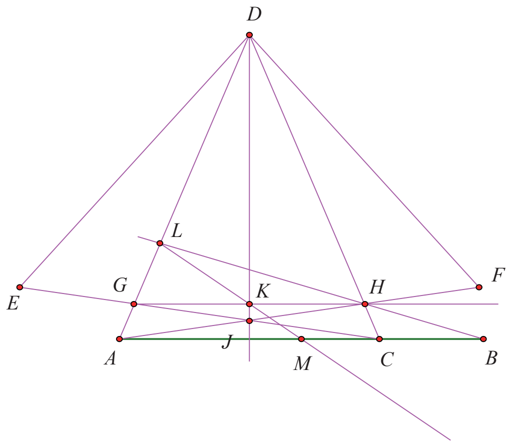


图 12-1-10

3．过直线外一点作直线的平行线

已知直线 AB 和 C 点，过 C 点求作 AB 的平行线。

作法：

（1）以直线 AB 为基础，反复搭建等边三角形，直到有一条直线 DE 与 C 点足够近，如图 12-1-11 所示。

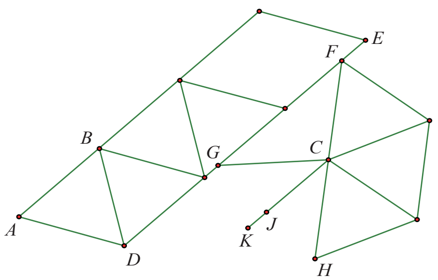


图 12-1-11

（2）以 C 点为端点的两根火柴棒的另一端点落在直线 DE 上，分别为 F、G 点。

（3）从 CF 开始搭建正三个三角形，得到 CH，使得 F、C、H 共线。

（4）作出 GH 的中点 J（解法参照中点作法，如果 GH 的距离太远，无法用前面的中点作图求解，说明 DE 与 C 点距离还不够近，需要继续构建正三角形，使得 DE 与 C 点距离足够近为止），则过 CJ 的火柴棒平行于 AB，为所作平行线。

4．作出距离>$\sqrt{3}$ 的两点间中点

已知 A、B 两点，$AB>\sqrt{3}$，求作 AB 中点。

作法：

（1）以 A 为端点任意放置火柴棒 AC，如图 12-1-12 所示。

（2）作出过 B 点且与 AC 平行的火柴棒 BD（作图参照平行线作法）。

（3）分别以 AC、BD 为基础，向中心靠拢搭建对称的图形构件，直到两个端

点 E、F 距离足够近为止。

（4）作出 EF 的中点 M，则 M 为 AB 的中点。

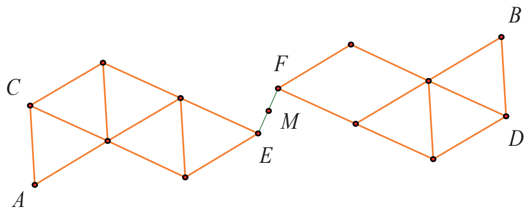


图 12-1-12

5．连结长距离的两点

已知 A、B 两点，$AB>\sqrt{3}$，连结 A、B 两点。

解法一：

作法：

（1）作出 AB 的中点 M，再作 M 与 A 点的中点 N，……直到作出的中点与 A 点距离足够近。

（2）连结 A 点和中点，然后不断延长线段，这条线段必然通过 B 点，此线段为所作线段。（图形略）

解法二：

仿照短直尺连结长距离两点的方法连结，具体见第九章第二节短尺小规作图。

6．作等边三角形

情况一：已知线段 AB，$AB<$火柴长度，求作边长等于 AB 的等边三角形

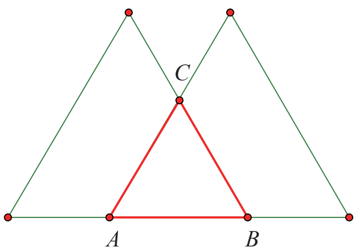


图 12-1-13

作法：

如图 12-1-13 所示，用六根火柴搭建两个正三角形，交点为 C，则△ABC 为等边三角形。

情况二：已知线段 AB，$AB>$火柴长度，求作边长等于 AB 的等边三角形

作法：

（1）连结 AB，如图 12-1-14 所示（具体作图见连结火柴棒两点作图）。

（2）在两边搭建两个正三角形。

（3）将两个小正三角形延长，得到交点 C，则△ABC 为等边三角形。

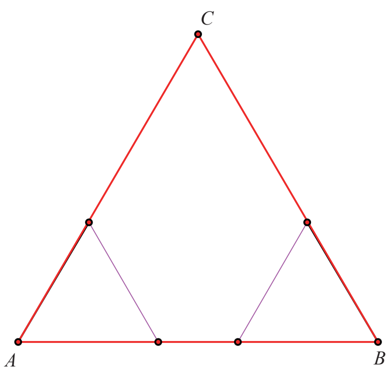


图 12-1-14

7．任意等分线段

火柴棒可以搭建一条线段的平行线，那么就可以参照“第七章单尺作图”作出线段的任意等分点，具体过程略。

8．作正三角形

作法：直接用三根火柴搭建，如图 12-1-15 所示。

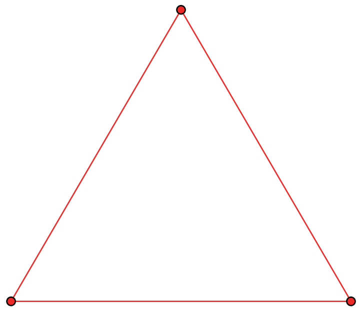


图 12-1-15

9．作正方形

作法：

（1）任意搭建正三角形△ABC，然后继续搭建正三角形△BCD、△BDE，如图 12-1-16 所示。

（2）火柴一端与 A 点重合，另一端为 F 点，AF 的位置是任意的。

（3）以 BF 为底，搭建等腰三角形△BFG。

（4）搭建正三角形△BHG，HG 与 ED 交于点 J。

（5）过 BF 的火柴为 BK；过 BJ 的火柴为 BL。

（6）搭建出 M 点，则四边形 $BKML$ 为正方形。

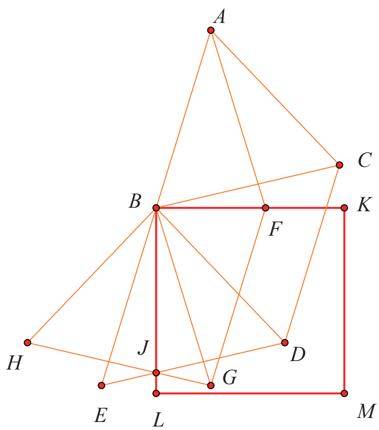


图 12-1-16

10. 作正五边形

作法：

（1）用五根火柴搭建△*ABE*，如图 12-1-17 所示。

搭建法：*CE*=*ED*=*BC*=*AD*=*AB*=一根火柴棒，并且要求 *A*、*C*、*E* 共线；*E*、*D*、*B* 共线。为了保证三点共线，它们分别用一根火柴 *AF*、*BG* 作辅助。

（2）以 *A*、*E* 搭建出 *J* 点；以 *B*、*E* 搭建出 *K* 点，则 *EKBAJ* 为正五边形。

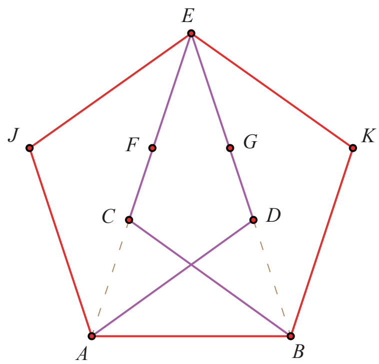


图 12-1-17

11. 作正六边形

作法：

用十二根火柴搭建，如图 12-1-18 所示。

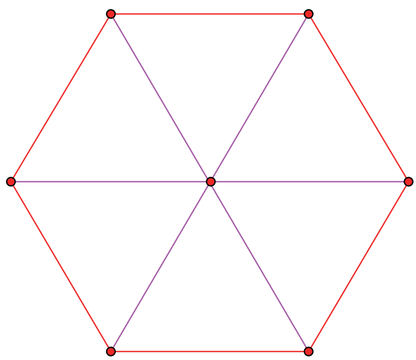


图 12-1-18

12. 作正八边形

作法：

（1）任意放置一根火柴棒 *OA*，如图 12-1-19 所示。

（2）以 *AO* 为基础连续搭建正三角形△*ABO*、△*BOC* 和△*COD*。

（3）作出 *BO* 的中点 *E*，*CO* 的中点 *F*。

（4）以 *A* 点为端点，过 *E* 点放置火柴棒 *AG*；以 *D* 点为端点，过 *F* 点放置火

柴棒 DH。

（5）搭建正三角形 $\triangle AGJ$、$\triangle DHK$。

（6）以 O 点为端点，过 J 放设置火柴棒 OL；以 O 点为端点，过 K 点放置火柴棒 OM。

（7）以 OL 为基础，连续搭建正三角形 $\triangle OQL$、$\triangle OLN$ 和 $\triangle ONP$；以 OM 为基础，连续搭建正三角形 $\triangle OTM$、$\triangle OMR$ 和 $\triangle ORS$。

（8）连结 CG、BH，交点为 U。

（9）以 O 为端点，过 U 点的火柴棒为 OW。

（10）MT、QL 的交点为 V，以 O 点为端点，过 V 点的火柴棒为 OX。

（11）顺次连结 W、S、D、Q、X、T、A、P，作出正八边形。

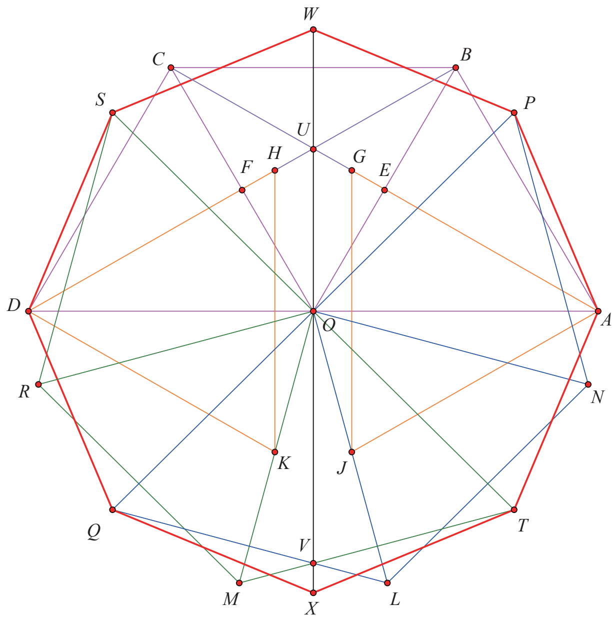


图 12-1-19

如果允许火柴棒之间的连结点可以自由活动又不断开，那么火柴棒可以作出尺规作图不能作出的图形。下面是火柴棒在这样的情况下的几个作图举例。

13．作正七边形

作法：

（1）用七根火柴搭建 $\triangle ABC$，$CF=CG=FE=GD=BD=AE=AB$，C、F、D、A 四点共线；C、G、E、B 点共线，如图 12-1-20 所示。

（2）以 A、F 搭建出 H 点；以 B、G 搭建出 J 点。

（3）以 C、H 搭建出 L 点；以 C、J 搭建出 K 点，则 $CLHABJK$ 为正七边形。

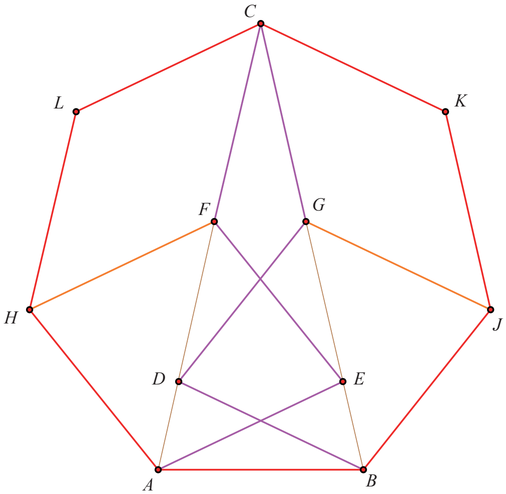


图 12-1-20

14. 作正十七边形

从正五边形、正七边形可以看出奇数边正多边形一个比较简易的作图规律，用这个规律可以轻松作出正十七边形（如图 12-1-21 所示），注意，从正七边形开始，用这个方法作正多边形，均要求火柴棒连结点可以自由活动却又不断开。

如图 12-1-21 所示是正十七边形完整搭建图形，先搭建出△*ABC*，其余边从底部 *BC* 附近开始往上搭建，图中所有小四边形都是棱形。

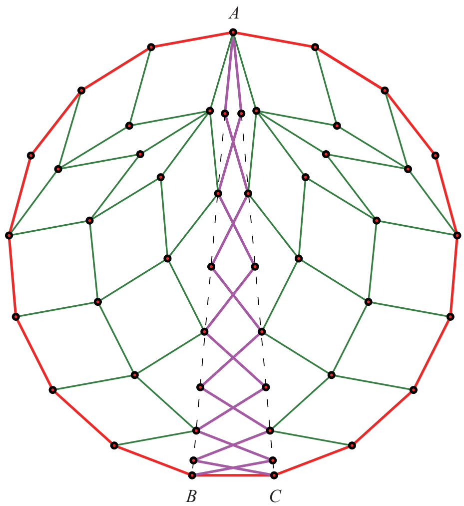


图 12-1-21

15. 撑起正方形

用四根火柴首尾相连，围成一个正方形 *ABCD*，假如正方形立起来，那么周

围需要加多少根首尾相连的火柴铰链，才能固定正方形？（火柴连结处可以自由活动）

答案是至少要 23 根，如图 12-1-22 所示。

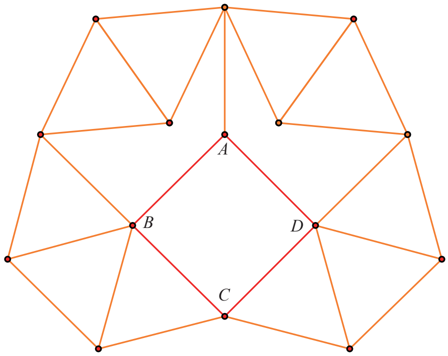


图 12-1-22

第二节
折纸几何学

折纸是一门极具观赏性的艺术，非常有利于智力的训练，在日本非常发达。折纸过程中一般不允许对纸进行裁剪，所用纸的形状多种多样，有圆的、方的、不规则形状等，其中最常见的是正方形或长方形纸。折纸就是用一张或多张纸折出各种栩栩如生的艺术造型（如图 12-1-1 所示为天使之心、如图 12-2-2 所示为雪花、如图 12-2-3 所示为鱼、如图 12-2-4 所示为翼龙、如图 12-2-5 所示为蜘蛛），几乎可以说，只要纸足够大，折纸技术足够高，就可以折出一切造型！现在公认的最复杂的折纸是日本折纸大师神谷哲史的作品“龙”，如图 12-2-6 所示。

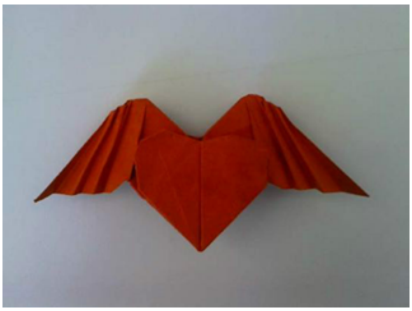


图 12-2-1　天使之心

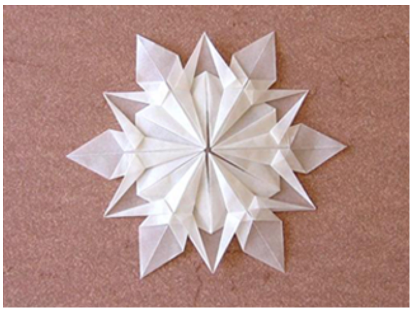


图 12-2-2　雪花

图 12-2-3　鱼

图 12-2-4　翼龙

图 12-2-5　蜘蛛

图 12-2-6　龙

现实中的纸是有厚度的，关于折纸有两个著名的问题：

（1）一张纸对折几次，厚度就可以超过珠穆朗玛峰？

（2）一张纸最多可以对折几次？

第一个问题，2005 年 5 月 22 日中国测量珠穆朗玛峰海拔高度为 8844.43 米。假设纸的厚度是 0.1 毫米，用对数计算结果是一张纸对折 27 次后，厚度就超越珠穆朗玛峰海拔高度。

对于第二个问题，很明显，纸越薄越大可以对折的次数就越多。理论上，无论要求的对折次数是多少，只要纸足够大，就可以办到。世界上很多人对这个问题进行了实验，目前的世界纪录是美国人创造的。2011 年美国得克萨斯州圣马克中学（St. Mark）的 15 名孩子们在 James Tanton 老师的带领下，用一张近 4 公里长的厕纸对折了 13 次，最后的一团纸多达 8192 层。其实这种疯狂的实验是不用去做的，只要知道纸的厚度和大小，就可以计算出可以对折的次数上限。

折纸几何学主要研究折纸过程中的各种几何问题。

折纸几何学是理想化的折纸，要求纸张没有厚度并且不可以伸缩，在折纸过程中不会因为纸的厚度问题而产生误差。

折纸与尺规作图不等价，折纸比尺规作图更强大，可以解决尺规作图不能解决的一些问题，例如，三等分任意角，解三次方程从而解决倍立方问题等。

折纸几何公理

1991 年日裔意大利数学家藤田文章指出了折纸中的 6 种基本操作，2001 年数

学家羽鸟公士郎给出了折纸的第 7 个基本操作，至此折纸的所有基本操作都完备了，这些基本操作也叫折纸的几何公理：

（1）过任意两点可以折一条直线。

（2）两点可以重合对折，且折痕是两点连线的垂直平分线。

（3）两线可以重合对折。两条直线相交时，折痕是两线夹角的平分线；两线平行时，折痕与两线平行，且三线等距。

（4）已知一定点和定直线，可以折出过定点且垂直于定直线的垂线。

（5）已知两点和一条直线，可以将其中一点折到已知直线上，且折痕通过另一个已知点。

（6）已知两点和两条直线，可以一次将两点分别折到两直线上。

（7）已知点 A 和 i、j 两条直线，可以沿着一条垂直于 j 的折痕把 A 折到 i 上。

折纸几何学是一门新兴的学问，很多问题有待探索，这里介绍有限的一些平面折纸例子，有兴趣的读者可查阅相关资料。

1．任意等分线段（芳贺定理）

芳贺定理：

如图 12-2-7 所示，正方形纸 $ABCD$，如果 E 点是 AB 的中点，将 C 点和 E 点重合，对折后 F 点为 AD 的三等分点。

一般的，如果 $BE=x$，正方形边长为 a，那么有 $AF=\dfrac{2ax}{a+x}$。

利用这条定理可以折出线段的任意等分点。

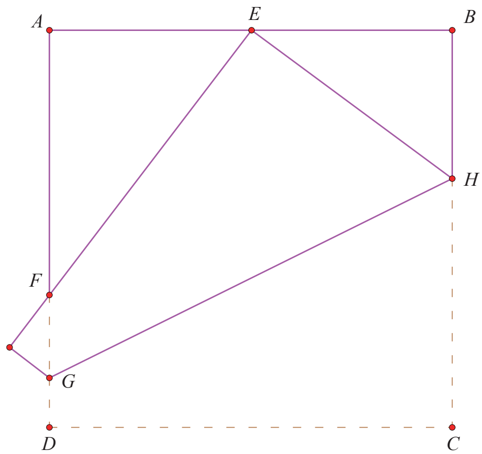


图 12-2-7

2．折正三角形、正方形、正五边形

用一张长方形纸可以折出正三角形（见图 12-2-8）、正方形（见图 12-2-9）、正五边形（见图 12-2-10），折法比较简单，其中的正五边形就是打个结。

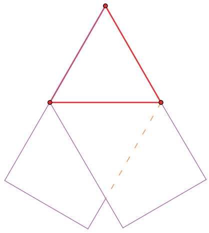


图 12-2-8

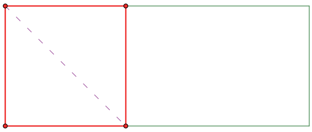


图 12-2-9

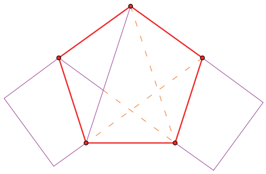


图 12-2-10

3. 折正六边形

用两条长方形纸折出六边形，如图 12-2-11 所示。

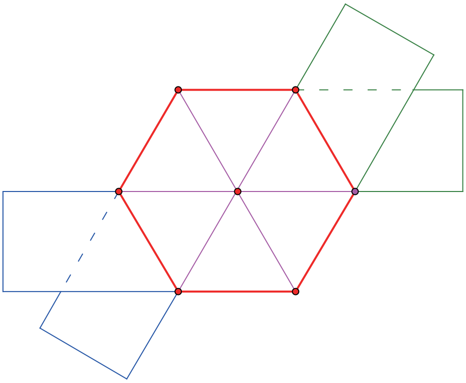


图 12-2-11

4. 折正七边形

一张长方形纸折出正七边形，如图 12-2-12 所示。

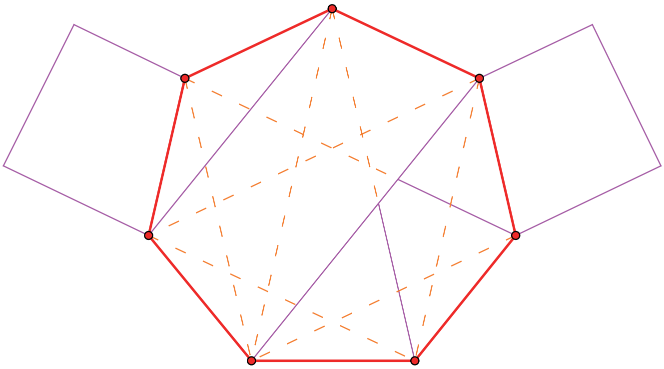


图 12-2-12

5. 折正八边形

用两条长方形纸折出正八边形，如图 12-2-13 所示。

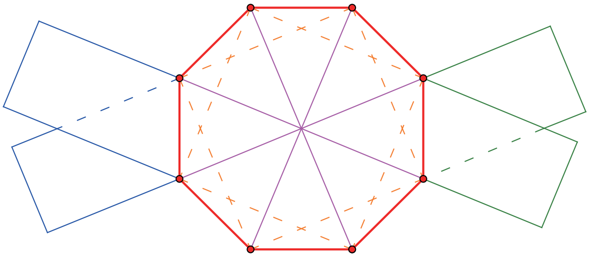


图 12-2-13

6．立体几何构造欣赏

如图 12-2-14 ~ 图 12-2-16 所示为多张纸折出的几个立体几何结构。

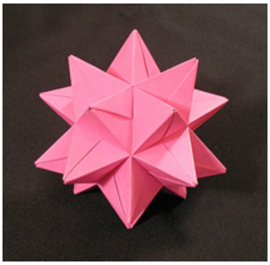


图 12-2-14

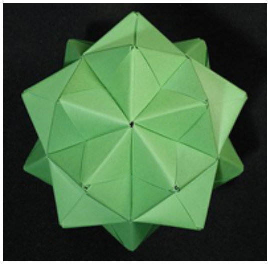


图 12-2-15

图 12-2-16

7．折抛物线

取一张矩形纸，在纸内选定一点 P，将纸对折，边经过 P 点，则折痕 AB 的包络是抛物线，P 点为抛物线焦点，矩形纸一边为抛物线准线，如图 12-2-17 所示。

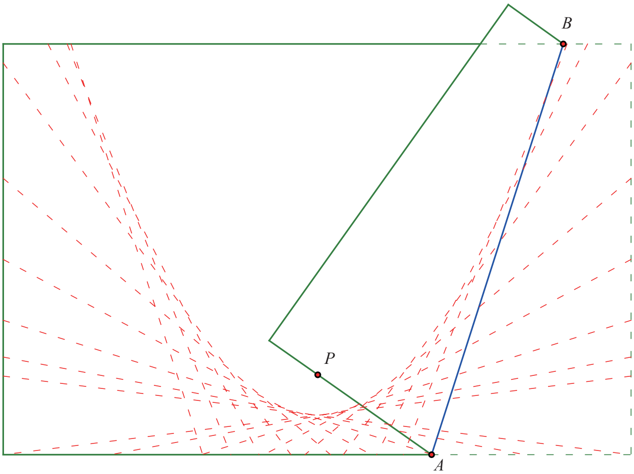


图 12-2-17

8．折椭圆曲线

取一张圆形纸，圆心为 O。选定纸内一点 A（A 不能与 O 点重合），每次对折

都使圆周经过 A 点，那么折痕 BC 的包络就是椭圆曲线，并且 A、O 为椭圆的两个焦点，如图 12-2-18 所示。

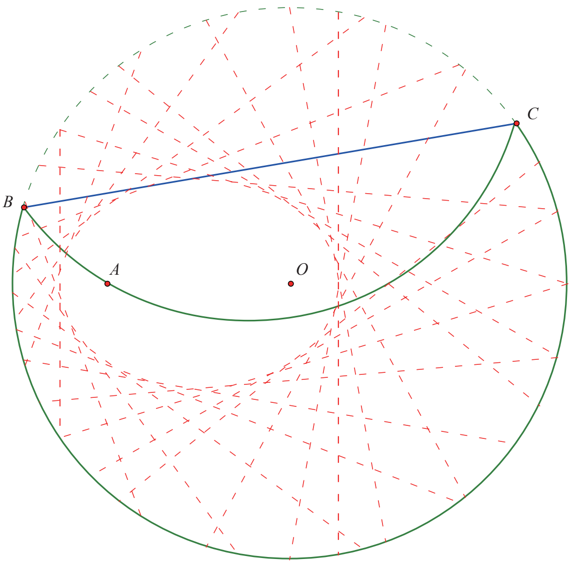


图 12-2-18

9. 折双曲线

取一张圆形纸，圆心为 O，在圆纸外任取一点 P，在圆周上任取一点 A，圆纸固定不动，将圆纸对折，使得 A 点和 P 点重合，那么折痕 BC 的包络就是双曲线，这里只能作出双曲线的一支，反过来，圆纸的圆心在 P 点，O 点为圆外一点，可以折出双曲线的另外一支，并且 O、P 为双曲线的焦点，如图 12-2-19 所示。

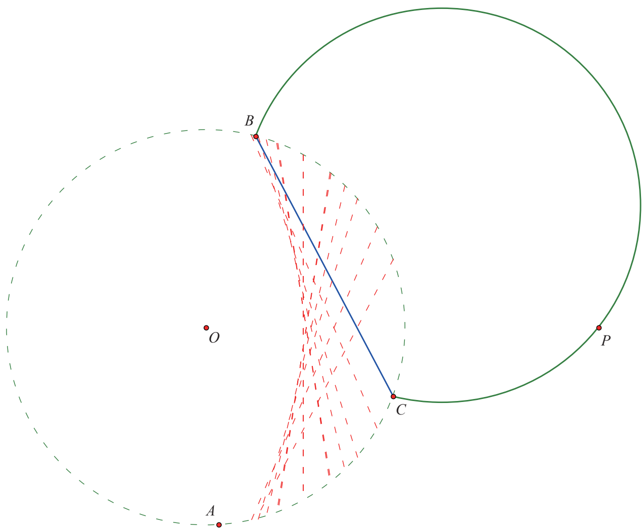


图 12-2-19

第三节
包络线

尺规作图只能作出圆，不能作出其他任何曲线，但我们可以通过作线簇的方法包络出曲线。

无数条同类型线组成一簇线簇，若存在一条曲线，该曲线处处与线簇中的一条线相切，则这条曲线称作线簇的包络线。在尺规作图中，用直线和圆来进行包络，线簇只要足够多，包络线的精度完全可以满意。

包络线的线簇极具艺术美感，是数学与艺术的完美结合，深得人们的青睐，在很多领域都可以觅得它们的芳踪。著名的广州塔就是用直线包络出双曲线，大家昵称为“小蛮腰”。现实生活中我们看圆形水杯的底部，会看到由光线勾勒出的圆的焦散曲线。

下面介绍一些简单的包络线作图，有兴趣的读者可以查阅相关资料。

1．圆

用直线包络出圆的方法多种多样，如图 12-3-1 所示是用圆内等长弦包络圆的例子。

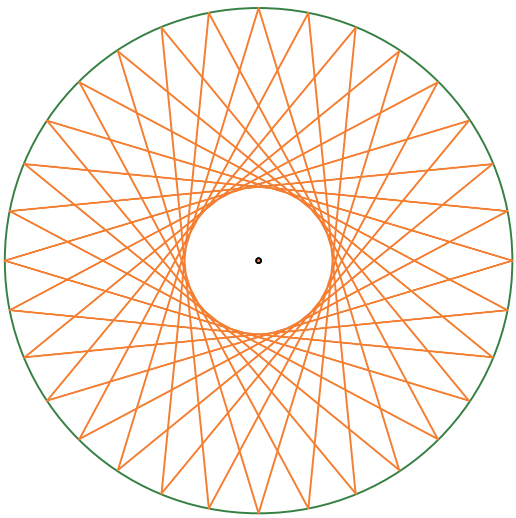


图 12-3-1

2．抛物线

解法一：

如图 12-3-2 所示，先作出两条相交线段，在线段上截取等距离的若干个点，顺次连结这些对应点，包络出抛物线。

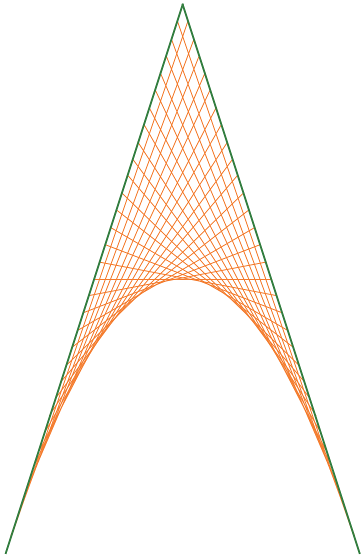


图 12-3-2

解法二：

如图 12-3-3 所示，以平面上一个定点 A 为焦点，一条定直线为准线作基础，在准线上任取一点与 A 点连结，作出连结线中点的垂线，垂线的包络就是抛物线。

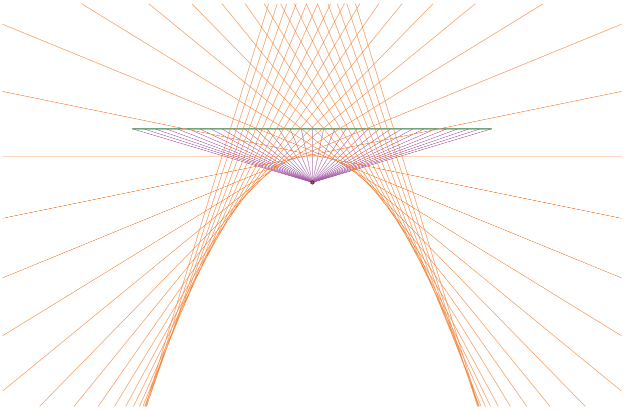


图 12-3-3

3．椭圆曲线

解法一：

作法：

（1）在⊙O 内任取一点 A 作为椭圆的焦点，如图 12-3-4 所示。

（2）在⊙O 上任取一点 B。

（3）过 B 点作 AB 的垂线 BC，则 BC 就是椭圆的一条包络线。

不断重复（2）（3）步作出足够多的包络线，椭圆的轮廓就显现出来了。

A 点是椭圆的一个焦点，*A* 点关于 *O* 的对称点是椭圆的另一个焦点。效果图如图 12-3-5 所示。

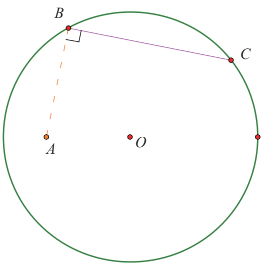


图 12-3-4

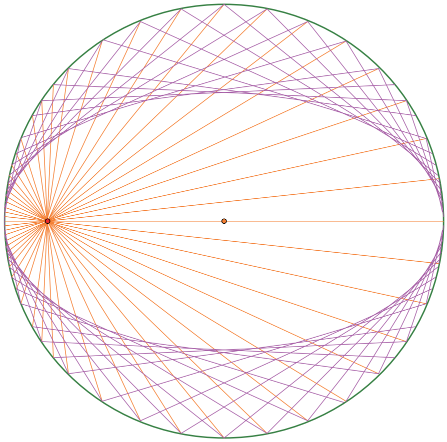


图 12-3-5

解法二：

作图原理：

如图 12-3-6 所示，*AB* 为⊙*O* 的直径，过 *A*、*B* 两点作两条垂直于 *AB* 的平行线，*P* 点为⊙*O* 上的动点，*BP*、*AP* 与平行线的交点分别为 *M*、*N*，则 *MN* 的包络是椭圆曲线。效果图如图 12-3-7 所示。

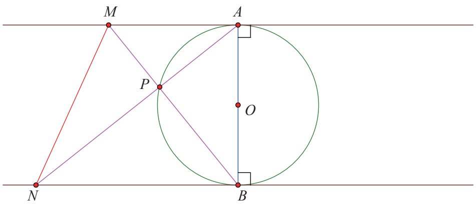


图 12-3-6

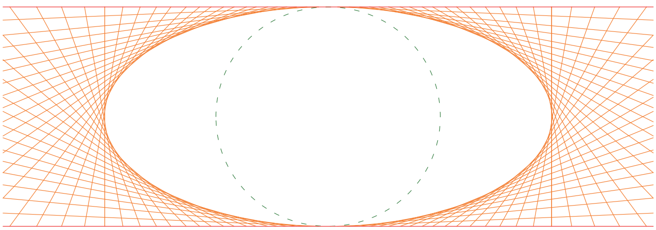


图 12-3-7

解法三：

作图原理：

如图 12-3-8 所示，线段 $AB \neq BC$，P、Q 两点分别在 AB、BC 上作匀速往返运动，P、Q 两点速率相等。以 Q 点为圆心，QP 长为半径的圆的包络线是椭圆曲线。如图 12-3-9 所示是效果图，线簇作的不够多，以至于包络线的右侧不太像椭圆。

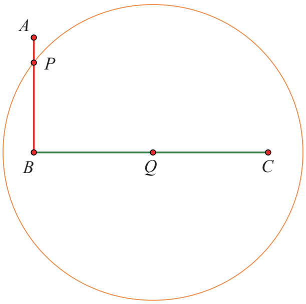


图 12-3-8

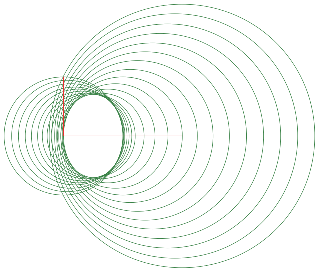


图 12-3-9　椭圆效果图

4. 双曲线

解法一：

作图原理：

（1）在⊙O 外任取一点 A 作为双曲线的焦点，如图 12-3-10 所示。

（2）在⊙O 上任取一点 B。

（3）过 B 点作 AB 的垂线，则这条垂线就是双曲线的一条包络线。

不断重复（2）（3）步，作出足够多的包络线，双曲线的轮廓就显现出来了。A 点为双曲线的一个焦点，A 点关于 O 的对称点是双曲线的另外一个焦点，双曲线效果图 12-3-11 所示。

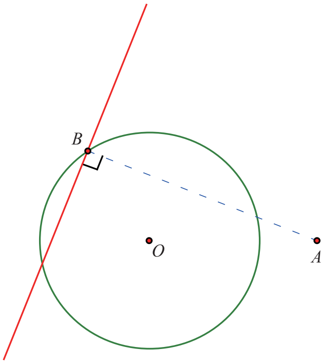


图 12-3-10

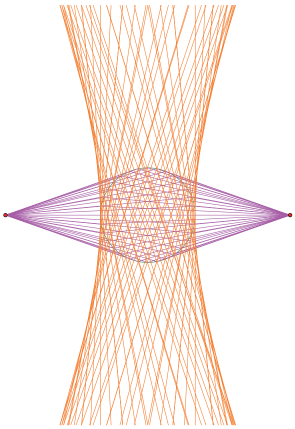


图 12-3-11

解法二：

作图原理：

如图 12-3-12 所示，*AB* 为⊙*O* 的直径，过 *A*、*B* 两点作两条垂直于 *AB* 的平行线，*P* 点为⊙*O* 上的动点，*AP*、*BP* 交平行线于 *M*、*N* 两点，*MO* 交 *AN* 于 *J* 点；*NO* 交 *MB* 于 *K* 点，则 *JK* 的包络是双曲线。双曲线效果图如图 12-3-13 所示。

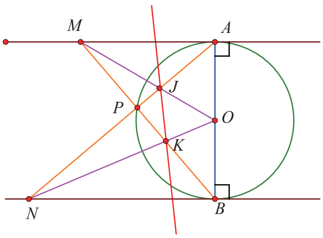


图 12-3-12

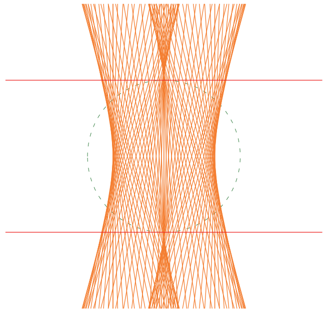


图 12-3-13　双曲线效果图

5．蚶线、心脏线

作图原理：

已知定圆⊙*O*，*P* 为平面上任一定点，点 *A* 为⊙*O* 上的动点，如图 12-3-14。以 *A* 为圆心，*AP* 长为半径的圆的包络线是蚶线；当 *P* 点也在⊙*O* 上时，包络线是心脏线。蚶线效果图，如图 12-3-15 所示。

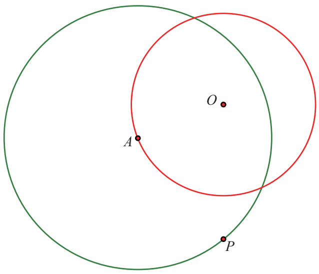


图 12-3-14

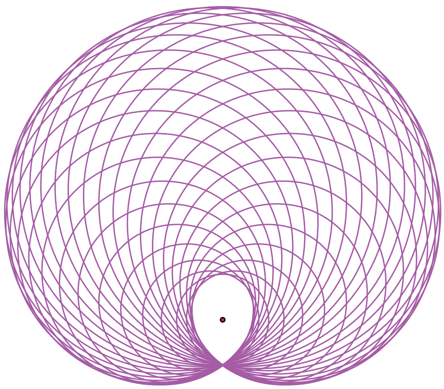


图 12-3-15

6．肾脏线、外摆线

作图原理：

已知定圆⊙*O*，*AB* 为其直径，*P* 为⊙*O* 上一个动点，如图 12-3-16 所示。以 *P* 点为圆心，且与 *AB* 相切的圆的包络线是肾脏线，肾脏线效果图如图 12-3-17 所示。肾脏线同时也是外摆线。

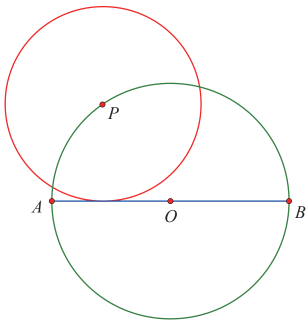


图 12-3-16

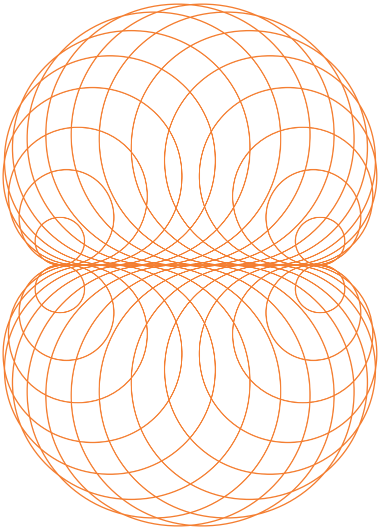


图 12-3-17

7．圆的焦散曲线

作图原理：

从光源 A 点射出光线到圆周形成反射（反射定律：反射角等于入射角），如图 12-3-18 所示，反射的光线的包络就是圆的焦散曲线，圆的焦散曲线效果图如图 12-3-19 所示。

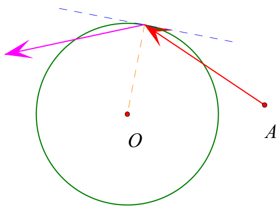


图 12-3-18

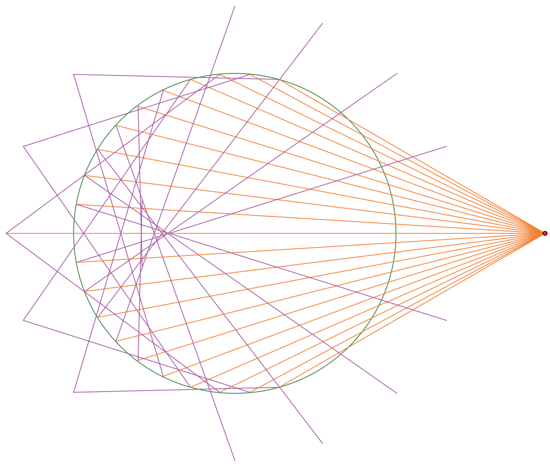


图 12-3-19

8．追逐曲线

情况一：追逐直线上的动点

直线外一点 A 追逐直线上运动的点 B，A 点的运动轨迹就是追逐曲线。

如图 12-3-20 所示的两点均作匀速运动，A 点形成的曲线即追逐曲线。

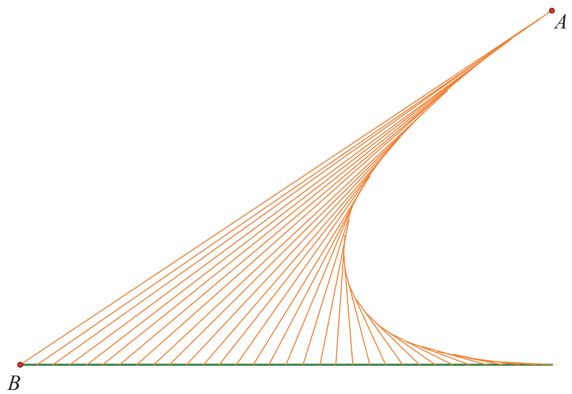


图 12-3-20

情况二：互相追逐

如图 12-3-21 所示演示的是三个点互相追逐的情况，为了简化作图，三个点从正三角形顶点开始，三个点的运动速率相同，三个点的运动轨迹形成三条追逐曲线。

注意：作图时不断作正三角形，并且相邻的正三角形顶点的距离相等就行了。

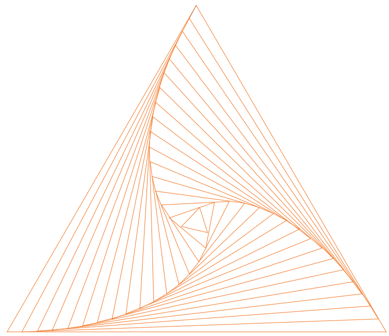


图 12-3-21

追逐曲线艺术构造，如图 12-3-22 所示。

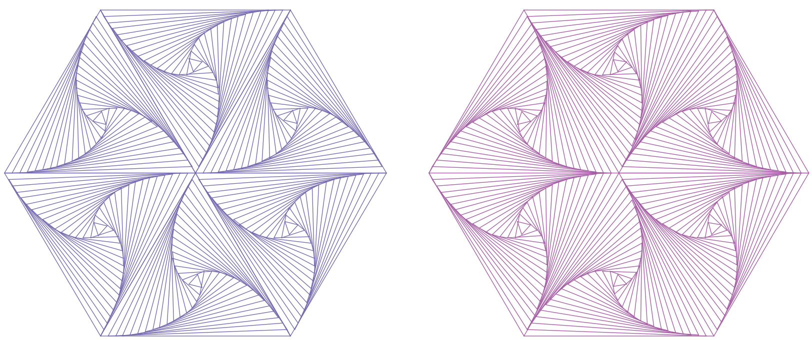


图 12-3-22

9．星形线与内摆线

情况一：西姆松线，三尖星形线

作图原理：

⊙O 是△ABC 的外接圆，在⊙O 上任取一点 P，过 P 点向△ABC 三边作垂线，垂足为 D、E、F，则 D、E、F 三点共线，这条线称作西姆松线，如图 12-3-23 所示。西姆松线的包络是三尖星形线。三角星形线效果图如图 12-3-24 所示。

一段线段在三段互成 120°夹角的线段间滑落，该线段的包络就是三尖星形线，也是内摆线；西姆松线的包络也是三尖星形线。

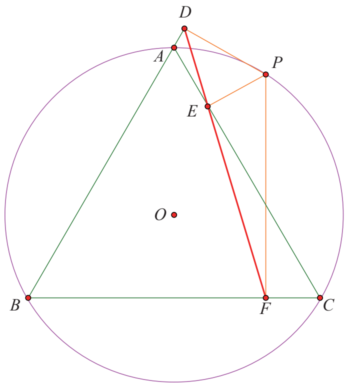


图 12-3-23

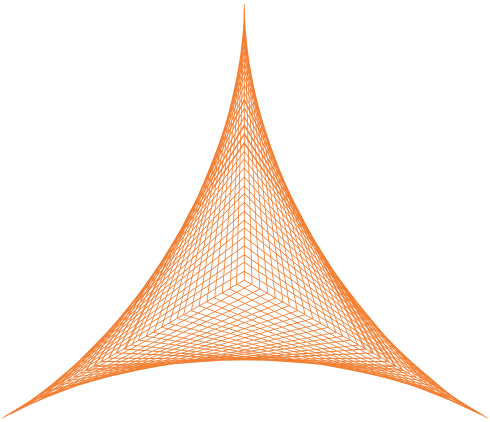


图 12-3-24

情况二：四尖星形线

作图原理：

如图 12-3-25 所示，线段 AB 和 BC 互成 90°夹角，固定长度线段 MN 两端靠着 AB、BC，MN 滑落过程的包络就是四尖星形线；四尖星形线同时也是内摆线。四尖形星线效果图如图 12-3-26 所示。

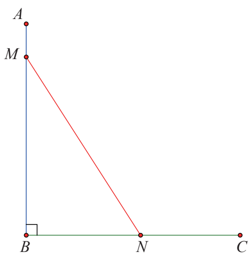


图 12-3-25

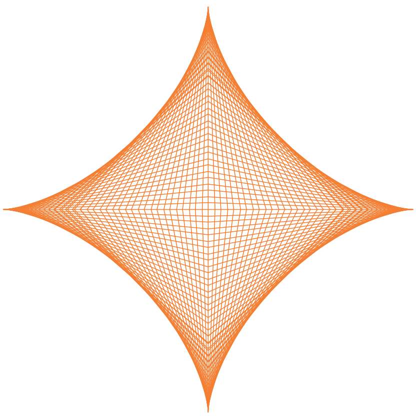


图 12-3-26

后　　记

中学时候，几何课本中介绍了尺规作图的一些基本作图，例如，作中点、垂线等，当时对这些问题没有多少感觉。后来在《十万个为什么》的数学卷里看到正五边形的尺规作图，觉得尺规作图很神奇。一般的数学题，往往只有有限几个解法，而尺规作图不同，同一问题的解法往往多种多样。一次午休的时候，偶然琢磨起角平分线作图，想出了不同于课本上的两种作法，从此被尺规作图的魅力深深吸引。到处搜索尺规作图资料，可惜无论网上还是书店，资料都太有限，“三大难题”倒是铺天盖地。无奈只好自己研究，如此断断续续过了好多年，总算小有收获。

在尺规作图难度排行榜里，锈规作图是难度的顶峰。生锈的圆规极为笨拙，需要大费周折才能实现一些简单的作图，推理过程非常复杂。理论上，从两点出发可以用锈规作出尺规作图能够完成的一切作图，但当年侯晓荣解决锈规作中点问题已是举世皆惊；德国数学家 Johann Gustav Hermes 用尺规作出正 65537 边形，花了整整十年，如果要用锈规作出正 65537 边形，大家可以想象一下它的难度和复杂度！

从简单作图到复杂作图，尺规作图逐渐失去实际意义，而从尺规发展到锈规，更加没有实用价值。不过尺规作图依旧魅力不减，对推动数学的发展继续作出重要贡献。

近年看到很多网友在网上寻问尺规作图，但问的人多，回答的人少。于是萌发了编写一本专门介绍尺规作图的书供爱好者参考的念头。因为工程量浩大，编写迟迟没有开工，一拖又是几年，直到最近才开始行动。

尺规作图问题种类繁多，难度参差不齐，解法五花八门，绘图非常麻烦，编写颇有难度。不知熬了多少个通宵达旦，编撰终于完成，希望能抛砖引玉，大家创造出更多更好的作品来。书中一定还有不少错漏，欢迎广大读者交流指导，谢谢大家！

编著	莫海亮
邮箱	mohailiang1984@sina.com
	2014-12-22 于深圳市福田区

反侵权盗版声明

举报电话：（010）88254396；（010）88258888

传　　真：（010）88254397

E-mail：　　dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市万寿路 173 信箱

　　　　　电子工业出版社总编办公室

邮　　编：100036